Universidade Nova de Lisboa
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

Relatório de Estágio

Por

Fernando Nuno Conceição Tavares

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário”

Orientadores de Estágio:

Escola Secundária João de Barros: Prof. Filomena Teles

FCTUNL: Prof. António Domingos

Lisboa

2010

Índice Geral

Resumo

O presente trabalho é parte integrante do Relatório de Estágio Pedagógico para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário.

Este trabalho está estruturado em duas partes, sendo que na parte I é divulgada a Descrição e Reflexão da Prática Pedagógica exercida na Escola Secundária João de Barros, em Corroios, no ano lectivo 2009/2010, onde é descrita a minha integração na escola e em particular no departamento de Matemática, as turmas em que estive envolvido e nas quais desenvolvi o estágio, a preparação, organização e concretização das actividades lectivas, a relação pedagógica estabelecida com os alunos, o apoio prestado nas suas aprendizagens e a minha participação em projectos e actividades, assim como a participação nas estruturas de orientação educativa.

Na parte II é divulgado o Projecto de Investigação realizado durante o exercício da prática pedagógica, cujo objectivo foi perceber a capacidade que os alunos demonstram nos problemas de visualização espacial e construção geométrica, relacionados com truncaturas em poliedros regulares e consequentemente a obtenção de novos sólidos, a sua planificação, o estudo das secções determinadas nos poliedros regulares por um plano de corte, assim como, calcular e relacionar áreas e volumes entre os sólidos de partida e os novos sólidos obtidos. Projecto este ao qual foi feita uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos.

Abstract

This work is an integral part of the Report of the Pedagogical Probationary Period for obtaining the Master degree in the teaching of Mathematics in basic and secondary education.

This work is structured in two parts, in part I is disclosed the Description and Reflection of Pedagogical Practice exerted at Secondary School João de Barros, Corroios, in academic year 2009/2010, where it is described my integration in school and in particular in the department of Mathematics, classes in which I was involved and in which development my Pedagogical Probationary Period, the preparation, organization and implementation of the pedagogical activities, the relationship established with the students, the support in their learning and my participation in projects and activities, as well as participation in the structures of educational guidance.

In part II is disclosed the Research Project carried out during the year of pedagogical practice, whose objective was understand the students ability in problem solving of spatial visualization and geometric construction, related with intersections in regular solids and consequently to obtain a new solid. The planning of new solid, the study of resultant sections in regular solids by a cut plane, as well as, to make calculations and to relate areas and volumes between the departure solids and the new obtained solids. This project which was made a quantitative and qualitative analysis of the results obtained.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Escola Secundária João de Barros

Mestrado em Ensino de Matemática
no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário
Ano Lectivo 2009/2010

Parte I

Descrição e Reflexão da Prática Pedagógica

'avares

le Barros): Prof. Filomena Teles

: Prof. António Domingos

Índice

1 – Introdução

O presente relatório tem como principal objectivo descrever e reflectir a prática pedagógica exercida durante o ano de estágio de Matemática, na Escola Secundária João de Barros. Visa igualmente reflectir uma análise dos progressos efectuados e dos erros cometidos, avaliando a concretização dos objectivos iniciais.

O actual modelo de estágio não contempla a atribuição de turmas aos estagiários, sendo este concretizado através de regências nas turmas do orientador. Esta metodologia contribuiu para uma maior participação do orientador de estágio, e dos próprios estagiários, em todas as actividades lectivas, não só na leccionação das aulas mas também no planeamento e na preparação das mesmas.

2 – Integração na Escola/Departamento de Matemática

A minha integração na escola foi bastante positiva, desde logo fui bem recebido pela Orientadora de Estágio e pelos restantes colegas professores. Relativamente aos não docentes, sempre existiu uma relação de cordialidade e respeito mútuo.

No que diz respeito ao Departamento de Matemática, e mais especificamente pelo Coordenador do Departamento, houve sempre uma total disponibilidade para qualquer ajuda e esclarecimentos que fossem necessários.

Para o desenvolvimento do meu trabalho de preparação das actividades lectivas, foi-me disponibilizado o acesso ao gabinete do Departamento de Matemática onde pude usufruir, para além do próprio espaço físico, do equipamento, tais como computador, impressora e internet, de materiais didácticos e pedagógicos, etc.

Desde logo, a Orientadora de Estágio fez questão de reunir connosco (núcleo de estágio) para nos transmitir as primeiras informações acerca da própria escola, da sua gestão e do modo como esta funcionava relativamente a alguns aspectos que condicionam o desempenho docente. Foi-me dado a conhecer o Projecto Educativo e o Projecto Curricular de Escola, assim como os Critérios Gerais de Avaliação de escola, tanto para o 3º ciclo do ensino básico, como para o ensino secundário e mais especificamente no que diz respeito aos critérios de avaliação na disciplina de Matemática para o 9º ano e 10º ano.

Foi-me igualmente transmitida informação acerca das duas turmas que a orientadora de estágio tinha a seu cargo, sendo uma delas de 9º ano do ensino regular e outra do 10º ano, de Ciências e Tecnologias. Fiquei ainda informado acerca da composição das turmas, de quais os alunos que eram repetentes do 9º ano, da existência de dois alunos nesta turma com necessidades educativas especiais, alunos estes em que o seu processo educativo estava ao abrigo do Decreto-Lei n.º 3 de 2008 do Ensino Especial. Relativamente à turma de 10º ano, uma grande parte dos alunos provinha de outras escolas do ensino básico e o conhecimento das aprendizagens e competências destes alunos era ainda escasso para a Orientadora de Estágio.

3 – Turmas de Estágio

Tendo a Professora Orientadora duas turmas, uma de 9º ano do Ensino Regular e outra de 10º ano, Matemática A, foi opção minha, assim como da minha colega de estágio, participar nas actividades lectivas das duas turmas, e igualmente a leccionação em ambas.

Esta tomada de decisão prendeu-se com o facto de ter como objectivo alargar a experiência na leccionação em diferentes anos escolares, assim como ter a perspectiva do desempenho e resultados escolares de uma turma em ano terminal de ciclo e outra turma em inicio de ciclo subsequente.

Esta opção revelou-se extremamente vantajosa, pois deu-nos uma informação importante e fidedigna de como os alunos terminam o 9º ano de escolaridade em termos das suas aprendizagens e capacidades e quais irão ser as suas dificuldades em termos de desempenho escolar no início do ensino secundário.

A partilha de turmas, enriqueceu igualmente a produtividade e a qualidade dos materiais pedagógicos aplicados, assim como, as actividades de sala de aula desenvolvidas em conjunto, tornaram-se mais eficientes com vista à melhoria das aprendizagens e desenvolvimento de competências dos alunos.

Relativamente à composição das turmas, a turma do 9º ano tinha 24 alunos, cuja média de idades se situava nos 15 anos, ou seja, dentro do padrão do ano de escolaridade em causa, havendo apenas três alunos com idades entre os 16 e 18 anos. Nesta turma, como já referido anteriormente, existiam dois alunos cujo processo educativo estava abrangido pelo Ensino Especial, um dos quais apenas com adequações no processo de avaliação e apoio individualizado a Matemática e o outro aluno com currículo escolar próprio, ou seja, foi elaborado um currículo específico da disciplina adaptado às necessidades educativas do aluno. Este último frequentava a disciplina de Matemática num horário diferenciado da turma e apenas com uma carga horária semanal de duas horas. Uma grande parte dos alunos desta turma provinham da turma de 8º ano que já era da Orientadora de Estágio no ano lectivo anterior, havendo já um conhecimento aprofundado das suas aprendizagens e competências adquiridas.

No que diz respeito à turma do 10º ano, inicialmente composta por 28 alunos, entrando ainda durante o 1º período mais dois alunos, perfazendo um total de 30, contudo com o desenrolar do ano lectivo e por consequência das desistências inerentes, esta turma terminou o ano apenas com 25 alunos. A média de idades era inicialmente de 15 anos e como já foi referido anteriormente, não havia um conhecimento aprofundado sobre as aprendizagens e competências da maioria destes alunos ao nível da Matemática, a única informação útil que havia era o nível de avaliação com que provinham do ensino básico a Matemática. Com o desenvolver do ano lectivo veio-se a verificar que existiam alunos muito fracos e alguns bons alunos, sendo o grosso da turma alunos de capacidades medianas.

4 – Preparação e Organização das Actividades Lectivas

Com a minha envolvência em dois anos escolares diferentes, 9º e 10º anos, a preparação e organização das actividades lectivas teve por base as competências essenciais da Matemática a desenvolver pelos alunos e as orientações curriculares, para estes dois anos escolares.

Relativamente ao 3º ciclo do ensino básico, devem os alunos desenvolver um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à Matemática, nomeadamente:

- A predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica;
- O gosto e a confiança pessoal em realizar actividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático e a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior;
- A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;
- A compreensão das noções de conjectura, teorema e demonstração, assim como das consequências do uso de diferentes definições;

- A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas;
- A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos;
- A tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, a natureza ou a arte, envolva ela elementos numéricos, geométricos ou ambos;
- A tendência para usar a Matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos.

No que diz respeito às orientações curriculares para o 9º ano, tive em conta o Programa de Matemática do Ministério da Educação, publicado pelo Departamento de Educação Básica, 5ª edição, 1991.

Para o 10º ano, Matemática A, tive em conta as orientações curriculares do Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 2001.

4.1 – Recursos e instrumentos utilizados

Na preparação das actividades lectivas tive em conta as orientações curriculares para o ano escolar em causa e as características das turmas, adoptando estratégias de facilitação das aprendizagens dos alunos.

Utilizei o manual adoptado como fonte de informação, para que os alunos posteriormente pudessem facilmente estudar por este.

Fiz uso de apresentações em PowerPoint com a utilização conjunta do quadro interactivo e/ou videoprojector. A calculadora, científica e gráfica, esteve sempre presente nas actividades lectivas.

Elaborei fichas de trabalho esquematizadas em duas partes distintas, a primeira parte contempla um resumo teórico dos conceitos e a segunda parte de cariz prático com a resolução de exercícios e problemas com vista à consolidação dos conhecimentos.

Na turma de 10º ano, no âmbito da unidade das funções, dedicámos uma aula para a realização de actividades de modelação matemática, e para tal, utilizámos sensores de movimento (CBR) para a recolha de dados e o equipamento necessário à realização das experiências da bola saltitante e da bola deslizante. Como auxílio na unidade do estudo das funções, quer para o 9º ano, quer para o 10º ano, também utilizei o software Graph 4.3.

Foi igualmente utilizada a Plataforma Moodle da Escola Secundária João de Barros para disponibilizar aos alunos um conjunto de materiais de apoio ao estudo para o Exame Nacional de Matemática de 9º ano.

4.2 – Planificações

De acordo com o previsto iniciei a minha actividade lectiva na turma do 9º ano com a unidade das funções, que é a unidade 3 – Proporcionalidade Inversa. Representações Gráficas.

No 10º ano, iniciei a leccionação igualmente com a unidade das funções, onde leccionei os temas da Função Afim e da Função Quadrática. Posteriormente leccionei o tema das Operações com Polinómios e Factorização de Polinómios.

Previamente à leccionação destas unidades foram elaboradas as planificações de unidade curricular e de aula.

As planificações de unidade/tema, elaboradas com base nas orientações curriculares do Ministério da Educação, foram estruturadas da seguinte forma: numa primeira parte constam os objectivos gerais da unidade e os pré-requisitos necessários; numa segunda parte constam o número de aulas (blocos de 90 minutos) previstas para a unidade, os conteúdos a abordar, os objectivos específicos de aprendizagem e competências a desenvolver, as metodologias e estratégias de ensino, os recursos necessários e a avaliação prevista para os alunos.

Relativamente às planificações de aula, foram elaboradas tendo em conta:

- o tempo útil de aula, e dentro deste considerei aproximadamente metade da aula para exposição teórica dos conceitos e a outra metade para a aplicação prática com resolução de exercícios e problemas;
- quais os materiais e recursos necessários;
- a maior ou menor dificuldade do conceito a abordar e a relação deste com as características da turma (pré-requisitos dos alunos);
- qual a melhor estratégia/metodologia de ensino de forma a que os alunos realizem as aprendizagens e adquiram as competências previstas;
- a interacção entre o professor e os alunos no decorrer da aula;
- a participação dos alunos no desenvolvimento da aula;
- a avaliação prevista para os alunos.

4.3 – Avaliação

Uma das informações prestadas logo desde o início da minha integração na escola foi sobre a avaliação dos alunos e a forma como esta está prevista ao nível dos critérios de escola, quer para o 3º ciclo do ensino básico, quer para o ensino secundário.

Existe a avaliação formativa e sumativa, a primeira que decorre durante o desenvolver do ano lectivo e é baseada na realização de testes formativos e sumativos, fichas de trabalho, outros trabalhos teórico/práticos e avaliação de atitudes e valores. A avaliação sumativa, interna e externa (no caso do 9º ano com o exame nacional), é realizada no final de cada período lectivo, sendo de carácter contínuo, tendo em conta todos os parâmetros da avaliação.

4.3.1 – Critérios de avaliação

Existem critérios de avaliação bem definidos para os dois ciclos de ensino, básico e secundário,

Os critérios de avaliação estão estruturados em dois grandes domínios, que são os conhecimentos e as capacidades e as atitudes e valores.

De acordo com o Projecto Curricular de Escola, para o 3º ciclo do ensino básico os critérios de avaliação estão definidos de acordo com a tabela seguinte.

<table>
<tr><th>DOMÍNIO</th><th>%</th><th>Instrumentos de Avaliação</th></tr>
<tr><td>CONHECIMENTOS

Aquisição e utilização de conhecimentos tendo em conta as competências específicas estabelecidas para cada disciplina ou área disciplinar.</td><td rowspan="2">85 %</td><td rowspan="2">Fichas formativas

Fichas sumativas

Fichas de trabalho

Trabalhos de pesquisa (individual/grupo)

Trabalhos de casa

Trabalhos elaborados na aula</td></tr>
<tr><td>APTIDÕES/CAPACIDADES

Definidas em cada uma das disciplinas ou áreas curriculares não disciplinares.
(Métodos de trabalho e de aprendizagem; Tratamento da informação; comunicação; estratégias cognitivas)</td></tr>
</table>

DOMÍNIO	%	Instrumentos de Avaliação
ATITUDES / VALORES (Saber estar / saber ser) • Revela interesse e atenção nas aulas; • Faz os trabalhos propostos para casa; • Colabora e executa os trabalhos propostos; • Participa de forma organizada; • É assíduo e pontual; • Tem o caderno de registo da aula organizado; • Traz os materiais necessários à aula; • Revela capacidade de diálogo; • Desenvolve as atitudes de cooperação e de tolerância perante opiniões diversas; • Revela um comportamento adequado; • Desenvolve a autonomia e o sentido de responsabilidade.	15 %	Observação directa na aula Grelhas de observação e registo

Para a disciplina de Matemática, no domínio dos conhecimentos e das capacidades, os testes têm um peso de 60 %, os trabalhos produzidos em aula um peso de 15 % e os trabalhos produzidos fora de aula um peso de 10 %, perfazendo na sua totalidade os 85 % estipulados para este domínio.

No que diz respeito ao ensino secundário e igualmente de acordo com o Projecto Curricular de Escola, os critérios gerais de avaliação estão definidos conforme a tabela seguinte.

Domínios	Peso relativo (%)
Conhecimentos e Capacidades	90
Atitudes / Valores	10

Na disciplina de Matemática, no domínio dos conhecimentos e das capacidades, os testes têm um peso de 75 %, os trabalhos produzidos em aula um peso de 10 % e os trabalhos produzidos fora de aula um peso de 5 %, perfazendo na sua totalidade os 90 % estipulados para este domínio.

4.3.2 – Instrumentos de avaliação

No domínio dos conhecimentos e capacidades foram aplicados testes, normalmente dois por período, fichas de trabalho realizadas em aula e fora de aula, trabalhos de pesquisa e de resumos de unidades curriculares, assim como, no 9º ano, a elaboração de um portefólio realizado conjuntamente entre a disciplina de Matemática e a área curricular não disciplinar de Estudo Acompanhado.

No que diz respeito à avaliação das atitudes e valores, foram utilizadas grelhas de registo que contemplavam parâmetros tais como a assiduidade/pontualidade, comportamento, o interesse/empenho demonstrados em sala de aula, a participação oral e escrita, a realização de trabalhos de casa, a organização do caderno diário, que continua a ser um instrumento fundamental para o sucesso das aprendizagens dos alunos.

No 3º ciclo do ensino básico, a indicação da classificação a constar nos instrumentos de avaliação formais e informais deve ser qualitativa e quantitativa nos seguintes termos:

%	Avaliação Qualitativa
0% a 19%	Muito Insuficiente
20% a 49%	Insuficiente
50% a 69%	Suficiente
70% a 89%	Bom
90% a 100%	Muito Bom

Para o ensino secundário a indicação da classificação a constar nos instrumentos de avaliação formais e informais é apenas quantitativa e numa escala de 0 a 20 valores.

4.4 – Elaboração de materiais pedagógicos

No decorrer do ano lectivo elaborei, em conjunto com a minha colega de estágio, diferentes materiais pedagógicos para as duas turmas, de acordo com a seguinte calendarização:

1º Período

- O desafio inicial proposto foi elaborar o primeiro teste do 10º ano, realizado no início de Outubro, a sua matriz de cotação, que permite efectuá-lo de uma forma equilibrada tendo em conta a relação entre os conteúdos e o peso das Competências da Matemática nos domínios de Conceitos e Procedimentos, Raciocínio, Resolução de Problemas e Comunicação Matemática, e posteriormente a sua correcção e classificação. Claro que sendo a primeira tarefa e de grande responsabilidade, causou uma enorme motivação, desde a forma como o teste seria estruturado, número de questões, elaboração das questões fechadas e questões abertas, adequação do tipo de questões para o teste, peso relativo dos conteúdos e peso relativo das questões no âmbito das competências matemáticas;
- Fichas de trabalho (módulo inicial, geometria no plano e no espaço) de preparação dos alunos para o momento de avaliação em causa, sua correcção e classificação;
- No âmbito do Projecto de Investigação na Prática Pedagógica, para o 10º ano, realização, correcção e classificação da ficha de diagnóstico TA – intersecção de um plano com um cubo, secções e truncaturas, respectivas métricas;
- No âmbito do Projecto de Investigação na Prática Pedagógica, para o 10º ano, procedemos à realização, correcção e classificação de seis actividades "Vamos Descobrir Novos Poliedros" – intersecção de planos em sólidos regulares, secções e truncaturas, respectivas métricas. Esta actividade foi realizada em diferentes fases, onde os alunos tinham prazos de entrega de determinadas questões, que eram revistas pelo professor podendo o aluno refazer a sua resolução. Este trabalho ficou concluído com a entrega de um relatório final acompanhado da construção do sólido e da sua planificação;
- No âmbito do Projecto de Investigação na Prática Pedagógica, para o 9º ano, realização, correcção e classificação de ficha de diagnóstico sobre semelhança de figuras;
- Elaboração de fichas de trabalho e apresentações em PowerPoint como suporte à leccionação da unidade curricular das funções na turma do 9º ano;
- Na turma de 9º ano, foi-nos proposto elaborar o seu segundo teste, a matriz correspondente, e a sua correcção e classificação. Nesta fase esta tarefa já se

tornou mais acessível, pois já tinha tido idêntica experiência com o teste do 10º ano;

- Fichas de trabalho (estatística, equações e sistemas de equações, funções) de revisão e preparação dos alunos para o momento de avaliação em causa;

2º Período

- No âmbito do Projecto de Investigação na Prática Pedagógica, para o 10º ano, procedi à realização, correcção e classificação da ficha de trabalho TAC – intersecção de planos em sólidos regulares, secções e truncaturas, respectivas métricas;
- Elaboração de fichas de trabalho e apresentações em PowerPoint como suporte à leccionação do tema das funções afim e função quadrática na turma do 10º ano;
- Elaboração do quarto teste do 10º ano, a matriz correspondente, e a sua correcção e classificação;
- No âmbito do Projecto de Investigação na Prática Pedagógica, para o 9º ano, realização de ficha informativa sobre semelhança de figuras
- No âmbito do Projecto de Investigação na Prática Pedagógica, para o 9º ano, realização de actividades de geometria sobre semelhança de figuras, com o auxílio do Software Geogebra;
- No âmbito do Projecto de Investigação na Prática Pedagógica, para o 9º ano, realização de mini guião de utilização do Software Geogebra;

3º Período

- Elaboração de fichas de trabalho e apresentações em PowerPoint como suporte à leccionação do tema operações com polinómios, factorização de polinómios e funções polinomiais na turma do 10º ano;
- Realização de fichas de trabalho de suporte às actividades de modelação matemática realizadas na turma de 10º ano;
- No âmbito do Projecto de Investigação na Prática Pedagógica, para o 9º ano, realização, correcção e classificação de ficha sobre semelhança de figuras;
- No âmbito do Projecto de Investigação na Prática Pedagógica, para o 9º ano, aplicação de um questionário sobre a utilização do Software Geogebra no auxílio à resolução de problemas de geometria, nomeadamente na semelhança de figuras;

- Elaboração de um conjunto de fichas de trabalho de revisão e preparação para o Exame Nacional de 9º ano, estruturadas de acordo com os quatro temas principais, Estatística e Probabilidades, Álgebra e Funções, Geometria e Números e Cálculo

5 – Concretização das Actividades Lectivas

As primeiras aulas leccionadas foram com a turma do 9º ano e tiveram início em Novembro, onde eu e a minha colega de estágio, leccionamos a unidade curricular das funções, que se estendeu até quase ao final do primeiro período. Na última semana de aulas introduzi a unidade dos números reais e inequações, com uma aula de revisões sobre números e cálculo.

No segundo período, como tinha exame de Tópicos de Matemática Discreta a vinte e um de Janeiro, pedi, à semelhança da minha colega de estágio, à Orientadora de Estágio para iniciar as actividades lectivas após esta fase, e então em Fevereiro voltei a leccionar, agora na turma do 10º ano, no âmbito da unidade das funções, os temas da função afim e função quadrática.

Já no terceiro período, mais precisamente em Abril, leccionei igualmente na turma do 10º ano, o tema das operações com polinómios e factorização de polinómios.

Independentemente do número de aulas que tenha leccionado individualmente durante o ano lectivo, existiu sempre um acompanhamento e uma participação da minha parte em todas as actividades lectivas das duas turmas, havendo uma total disponibilidade para o apoio às aprendizagens dos alunos no decorrer das aulas.

5.1 - Prática pedagógica supervisionada

A minha actividade lectiva, propriamente dita, teve inicio com a turma do 9º ano com a unidade das funções, no princípio de Novembro, embora o contacto com a turma já vinha sendo feito desde o início do ano lectivo através das tarefas que até então tínhamos (núcleo de estágio) desenvolvido com a turma, havendo já um clima de respeito e cooperação na relação professor/aluno.

Nos segundo e terceiro períodos as minhas aulas leccionadas foram com a turma do 10º ano, havendo também já nesta altura uma relação pedagógica bastante desenvolvida, pois também acompanhávamos a turma desde o início do ano lectivo e tínhamos já feito diversos trabalhos com e para a turma.

É claro que a minha primeira aula, e seguintes, a leccionar, me causou ansiedade e algum nervosismo, pois a preocupação de tudo correr conforme o planeado era enorme. O meu foco estava principalmente centrado na transmissão dos conhecimentos e na forma como o iria fazer e na realização das aprendizagens dos alunos, pois o resultado final de uma aula culmina nas competências aprendizagens adquiridas por estes, que resultam igualmente de uma contínua interacção entre o professor e os alunos.

Nesta altura tinha também a consciência de que os alunos estavam habituados a ter como professora a Orientadora de Estágio e de repente, existe uma necessidade de adaptação por parte destes a um novo professor e a diferentes formas de ensinar e de comunicar.

Penso que as minhas aulas decorreram com alguma normalidade, tentei que as aulas tivessem duas partes distintas, sendo uma delas mais teórica e a outra mais prática, contudo por vezes este método não é o mais indicado, e principalmente no ensino básico onde a atenção e concentração dos alunos é diminuta, e então devemos partir do concreto para a generalização e só assim conseguimos prender a atenção dos alunos nos conceitos que estamos a transmitir e que pretendemos que sejam assimilados por eles.

Outra grande preocupação é o cumprimento do plano de aula, que muitas vezes sofre desvios porque a interacção entre professor e aluno decorrente do desenvolvimento da aula o leva a esse facto, os alunos levantam dúvidas sobre determinados conceitos, que nós tínhamos planeado como pré-requisitos, contudo muitas vezes não acontece e temos que fazer um aparte na aula para proceder a essas explicações e depois retomar o nosso plano de aula.

Outras situações que por vezes se reflectem em desvios do plano de aula têm a ver com atitudes e comportamentos dos alunos praticados em sala de aula, que não são os mais indicados no contexto em causa. Durante as aulas a gestão do comportamento dos alunos é extremamente importante para o sucesso da aula e cada aula é um caso particular. Acho que de certa forma consegui manter a disciplina e o cumprimento das regras em sala de aula, no entanto acrescento que só com um acumular de experiência lectiva se adquire o traquejo necessário para lidar com inúmeras situações com que nos deparamos durante a nossa actividade docente.

Durante as aulas procurei sempre manter a comunicação professor/aluno com questões dirigidas aos alunos, sei que por vezes isso possa não ter acontecido da melhor forma e a questão ter sido colocada para o geral. Procurei igualmente a participação escrita dos alunos na resolução de exercícios e problemas no quadro prestando sempre o apoio necessário aquando da colocação de dúvidas.

Quero também deixar expresso que sempre tive o apoio e colaboração da Orientadora de Estágio para que existisse uma melhoria contínua nas minhas actividades lectivas e estratégias a utilizar durante as aulas.

Relativamente às duas turmas, houve também cooperação e uma boa receptividade por parte dos alunos, fazendo com que as aulas decorressem com normalidade.

5.2 - Cumprimento dos objectivos de aprendizagem dos alunos

Através da metodologia de ensino/aprendizagem utilizada no decorrer das actividades lectivas, com o respectivo desenvolvimento das aprendizagens realizadas e aquisição de competências, foram cumpridas as planificações, assim como os objectivos específicos propostos aos alunos.

5.3 - Identificação das principais dificuldades dos alunos e definição de estratégias por forma a serem superadas

Sempre que foram detectadas dificuldades de aprendizagens dos alunos em determinados conteúdos, houve a preocupação de efectuar um reforço da transmissão dos conhecimentos, quer no decorrer da própria aula, quer em tempo extra e também através da realização de fichas de trabalho.

6 - Relação pedagógica estabelecida com os alunos

A relação pedagógica com os alunos foi sempre positiva não existindo nenhuma situação de conflito. Existiu sempre uma cooperação mútua, não havendo interferência no desempenho das minhas funções de docente nem na aprendizagem dos alunos.

Pretendi sempre estabelecer com os alunos uma relação baseada no respeito, na disciplina e na cordialidade. Foi também com base na confiança que procurei gerir as minhas relações com os alunos.

O reforço positivo e o incentivo individual esteve sempre patente no decorrer das actividades lectivas de modo a que estes factos conduzissem a um conhecimento individualizado dos alunos.

7 - Apoio prestado na aprendizagem dos alunos

Sempre que os alunos solicitaram ajuda, houve da minha parte total disponibilidade nesse sentido. Contudo, independentemente de os alunos solicitarem ou não reforço de aprendizagens, procurei sempre através de metodologias adequadas verificar a aquisição de competências e conhecimentos de uma forma contínua, sempre no sentido dos alunos atingirem o sucesso na aquisição das competências essenciais da disciplina.

8 - Avaliação das aprendizagens dos alunos

Existiu desde o primeiro instante um trabalho de partilha entre os estagiários e a Orientadora de Estágio, e como tal estive sempre envolvido nas tomadas de decisão sobre a avaliação dos alunos, quer formativa, quer sumativa. Saliente-se que a avaliação sempre teve em conta, de forma rigorosa, os critérios de avaliação definidos para os dois ciclos escolares.

No decorrer do ano lectivo, elaborei, corrigi e classifiquei diversos instrumentos de avaliação, tendo sempre em conta os princípios orientadores a respeitar numa boa avaliação. Estes princípios contemplam: *a coerência*, cuja avaliação das aprendizagens deve estar em consonância com as três componentes do currículo, sendo as competências a desenvolver, metodologias a adoptar e conhecimentos científicos a abordar; *a integração*, cuja avaliação é entendida como parte constitutiva da própria aprendizagem; *o carácter positivo*, cuja avaliação deve dirigir-se prioritariamente ao que os alunos sabem, ao que já são capazes de fazer, e não ao que ainda não sabem; *a generalidade*, cuja avaliação deve dirigir-se a competências gerais do ensino, seguindo a visão holística da Matemática; *a diversidade*, cuja avaliação deve recorrer a formas diversificadas; *a postura*, cuja avaliação deve acontecer num ambiente de confiança, de rigor e de clareza.

9 - Participação em Projectos e Actividades de acordo com o Plano Anual de Actividades

Uma das primeiras tarefas em que o núcleo de estágio esteve envolvido foi no planeamento das actividades curriculares não lectivas que constam do Plano Anual de Actividades. Foi proposto ao Departamento de Matemática a participação do núcleo de estágio nas seguintes actividades:

- ClubeMath, FCT - UNL, com sessões ao Sábado (realização de actividades lúdicas em sala e fora da sala, visita a outros departamentos da FCT - UNL, visita a empresas) e sessões às 4as-feiras (com a realização de jogos como o

Mathtrivial, Mathbingo, Caça ao Tesouro, Peddy Paper, Quem quer ser Matemático);

- Concurso de Problemas, com a realização de um problema mensal para o ensino básico e secundário;
- Olimpíadas Portuguesas da Matemática;
- Canguru Matemático;
- Expo FCT;
- Participação no sítio da escola;
- Participação na plataforma Moodle.

No que diz respeito ao ClubeMath, foi programada uma visita para uma sessão de 4ª-feira com alunos dos 7º e 9º anos, mas por motivos logísticos não chegou a ser realizada. O concurso de problemas foi estruturado, elaborou-se o seu regulamento, arrancou no mês de Novembro, contudo o seu sucesso ficou aquém das expectativas.

No que diz respeito ao Canguru Matemático e às Olimpíadas, o núcleo de estágio participou com a colaboração na logística da organização e vigilância de provas. A ida à Expo FCT não foi realizada.

Relativamente ao Sitio e Plataforma Moodle, foi criada a disciplina Matemática 9º B, onde foi disponibilizado um conjunto de materiais de apoio ao estudo para os alunos do 9º ano.

10 - Participação nas Estruturas de Orientação Educativa

Logo desde o início da minha integração na Escola Secundária João de Barros, foi me permitida, como estagiário, a participação quer nos Conselhos de Turma, quer nas reuniões de Departamento Curricular.

Durante o mês de Outubro ainda participei num Conselho de Turma Intercalar da turma do 9º B e numa reunião de Departamento Curricular, contudo a partir de meados de Outubro iniciei a minha actividade de docente na Escola Secundária com 3º ciclo do Pinhal Novo, motivo pelo qual me impossibilitou de continuar a minha participação directa nas reuniões na escola João de Barros. Contudo, através da Orientadora de Estágio, fui estando sempre ao corrente das informações que eram necessárias saber.

11 - Utilização das TIC no processo de Ensino/Aprendizagem

No que diz respeito à utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação, considero que são de extrema importância e necessidade a sua utilização, de tal forma que fiz e faço uso contínuo, destas, no decorrer das minhas actividades lectivas.

Nas aulas, a utilização do quadro interactivo e videoprojector, associada à utilização de softwares matemáticos, como por exemplo, para as funções o Graph 4.3, o emulador TI-SmartView da calculadora gráfica, estiveram sempre presentes. Para a geometria, a utilização do Geogebra, quer em aula, quer na preparação de materiais pedagógicos.

A Plataforma Moodle, é, sem dúvida, outra ferramenta muito importante para o desenvolvimento da capacidade de comunicação entre o professor e os alunos. Para a turma do 9º B, foi criada na plataforma a disciplina Matemática 9º B, que permitiu aos alunos terem acesso a um conjunto de materiais pedagógicos de apoio ao estudo.

12 - Conclusão

O desempenho da função docente assenta em duas grandes competências, a científica e a pedagógica. Considero que o conhecimento científico das matérias que se ensinam, o recorrer ao saber próprio da profissão, apoiado na investigação e na reflexão partilhada da prática educativa é indispensável de modo a garantir o sucesso das aulas. No que diz respeito à competência pedagógica, penso que o factor personalidade tem um peso significativo nesta componente, contudo também existe a possibilidade de trabalhar métodos de liderança, de motivação dos alunos e de estratégias de ensino e aprendizagem. A experiência profissional e a formação contínua assumem um papel importante no desenvolvimento destas duas competências.

Na realidade, a minha actividade lectiva não se iniciou com a realização do estágio, lecciono há quatro anos uma outra disciplina e isso só por si torna as experiências completamente diferentes e enriquecedoras, embora a minha atitude profissional seja idêntica para com os dois saberes, tenho a plena consciência que o ensino da Matemática exige um elevado rigor na preparação e transmissão dos conteúdos, assim como na própria envolvente da disciplina, pois sabemos que é uma das mais importantes do currículo escolar.

A minha experiência ao longo do estágio foi bastante positiva, pelo facto de sentir uma grande evolução profissional no ensino da Matemática, viver um período enriquecedor ao nível pessoal e na relação com a comunidade escolar.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Escola Secundária João de Barros

Mestrado em Ensino de Matemática
no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário
Ano Lectivo 2009/2010

Parte II

Projecto de Investigação na Prática Pedagógica

Intersecção de planos em sólidos regulares, secções e truncaturas, cálculo de perímetros, áreas e volumes

Um estudo aplicado a alunos do 10º ano de escolaridade

Tavares

o de Barros): Prof. Filomena Teles

L): Prof. António Domingos

Índice

Lista de Gráficos

Lista de Figuras

1 - Introdução

No ensino da Geometria procura-se um equilíbrio entre a Geometria por via intuitiva e a Geometria Analítica, de modo a desenvolver tanto o raciocínio geométrico directo como a resolução de problemas de geometria por via algébrica, sem esquecer o desenvolvimento de capacidades de visualização geométrica.

A Geometria é, por excelência, um tema formativo no sentido mais amplo do termo que, pela resolução de problemas apropriados, desenvolve variadas capacidades, desde a observação ao raciocínio dedutivo, ao mesmo tempo que deixa perceber verdadeiras conexões entre os vários temas da Matemática, da Álgebra à Análise e à Estatística.

Permite o desenvolvimento de capacidades de visualização e representação através de figuras que tão necessárias são para o estudo de todos os outros temas.

O ensino e a aprendizagem da Geometria revestem-se da maior importância devendo desenvolver no aluno uma intuição geométrica e um raciocínio espacial, assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática. Deve ainda desenvolver no aluno capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita.

A geometria permite a percepção e a visualização do espaço, o reconhecimento de formas, a abstracção de formas e a capacidade de representá-las através do desenho ou da construção do que foi idealizado. Permite fazer explorações, representações, construções, discussões, para que o aluno possa investigar, descobrir, descrever e perceber propriedades. É uma componente importante no desenvolvimento da aritmética e da álgebra.

Os alunos deverão ser capazes de realizar pequenas investigações e elaborar posteriormente relatórios utilizando linguagem matemática rigorosa, por forma a que desenvolvam hábitos de raciocínio geométrico.

Tanto em geometria plana como em geometria do espaço a prática de manipulação e observação de figuras e modelos geométricos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo.

Com base nos pressupostos citados anteriormente e tendo em conta que o aluno deve: desenvolver a aptidão para realizar e representar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas; utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria; formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente, e tendo por base a realização do estágio numa turma de 10º ano – Matemática A, onde, para além do módulo inicial, a primeira unidade de trabalho é precisamente a geometria no plano e no espaço, o acompanhamento contínuo e a minha envolvência nas aprendizagens e desenvolvimento de competências por parte dos alunos, tornaram-se essenciais na minha tomada de decisão para aplicação do projecto de investigação na prática pedagógica na unidade de geometria, mais especificamente nas questões relacionadas com a intersecção de planos em sólidos regulares, respectivas secções e truncaturas e consequentemente a obtenção de novos sólidos, assim como o correspondente cálculo de perímetros, áreas e volumes.

2 - Objectivo e Questões do Projecto

Tendo então seleccionado o tema de trabalho, a minha principal questão é perceber a dificuldade que os alunos demonstram nos problemas de visualização espacial e construção geométrica, relacionados com truncaturas em poliedros regulares e consequentemente a obtenção de novos sólidos. Igualmente, analisar quais as dificuldades que os alunos revelam na realização da planificação de um dos sólidos resultantes do corte, no estudo das secções determinadas nos poliedros regulares por um plano de corte, assim como, no cálculo de áreas e de volumes dos sólidos de partida e dos novos sólidos obtidos.

3 - Enquadramento Teórico

Pretende-se neste item efectuar uma abordagem genérica sobre o ensino da Matemática e, em particular da Geometria, efectuando uma análise do seu desenvolvimento ao longo dos tempos.

É ainda feita uma caracterização da investigação matemática, nomeadamente no domínio da Geometria e igualmente uma abordagem ao pensamento Visual-Espacial em Educação Matemática.

3.1 – Geometria e Educação Matemática

A Geometria não é só um dos ramos mais fascinantes da Matemática, é sobretudo um dos mais notáveis produtos do intelecto do Homem e desempenha um papel fundamental na sua Civilização que nunca será demasiado sublinhar. Da roda à agrimensura, da cartografia à própria concepção físico-matemática do espaço, das construções arquitectónicas às artes visuais, a Geometria estuda abstracta e idealmente os espaços e as formas.

Hoje em dia, a Geometria abrange uma enorme variedade de disciplinas, técnicas e teóricas, nomeadamente as geometrias euclidiana e não-euclidianas, geometria projectiva, geometria diferencial, geometria algébrica, geometria discreta e geometria computacional.

A Geometria dos antigos, que nos foi legada, em particular, nos Elementos de Euclides, baseia-se no uso da régua e do compasso para a descrição e estudo do plano e do espaço à dimensão e escala humanas. Ela foi e terá que continuar a ser uma base essencial da educação e formação intelectual do Homem. Apesar de "mal tratada" por algumas correntes educacionais na segunda metade do século XX, a Geometria parece estar a recuperar o seu papel crucial no ensino da Matemática a todos os níveis.

Hilbert (1932), referia a propósito de Geometria e Imaginação, que contrariar a tradicional imagem da Matemática como um assunto impopular, apesar de se lhe reconhecer a sua importância, passa por desfazer o mito de que ela não é senão um desenvolvimento das contas aritméticas ou uma variante árida da manipulação de números.

Está fora de questão a importância da aritmética na aprendizagem e automatização de algoritmos básicos e da importância destes no ensino da Matemática, para além das controversas calculadoras de bolso. No entanto, e apesar de estas poderem conter uma componente gráfica, o papel da Geometria, clássica e moderna, continuará a ter uma importância formativa fundamental, quer na imaginação quer na demonstração matemáticas.

No final do século XX verificaram-se mudanças significativas no Currículo de Matemática, e consequentemente, ao nível da Geometria, apresentando-se, a mesma, com um papel de destaque, quer no Ensino Básico quer no Ensino Secundário, sendo proposta a sua leccionação de uma maneira inovadora alternada e ligada a outros ramos da disciplina estabelecendo conexão entre esta e o mundo real. Deste modo, os programas que entraram em vigor em 1991 ajustaram-se de uma forma mais eficaz às realidades da disciplina, tendo sido atribuída à Geometria a importância merecida, realçada pela sua inclusão ao nível das competências essenciais para todos os níveis de escolaridade.

No que diz respeito à Geometria do 3º ciclo, prossegue e aperfeiçoa um conjunto de conhecimentos básicos dos quais se salientam as medições, as construções, a análise e reconhecimento de propriedades, tendo em conta a importância da realização de experiências, formulações de conjecturas, argumentação de raciocínios e resolução de problemas assentes na observação e intuição que conduzem à elaboração de raciocínios indutivos e dedutivos. As actividades devem ser variadas, significativas e motivadoras permitindo desenvolver o espírito de pesquisa e iniciativa, a criatividade, a vontade de aprender e partilhar. A relação entre a experimentação e a dedução, em que ambas são importantes e devem desempenhar um papel complementar, as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática, e com outras áreas exteriores, devem ser valorizadas dando importância às suas aplicações na resolução de problemas.

3.2 – Investigação em Matemática

O professor, profissional de educação, deve desenvolver uma prática pedagógica pautada pela criatividade e reflexibilidade numa perspectiva de formação/actualização permanente. Todos estes aspectos legitimam-se pela necessidade de, no decorrer da sua prática pedagógica, identificar problemas, estabelecendo relações causais, procurando formas de resolução possíveis e adequadas à situação contextual.

É no domínio da focalização de problemas e consequente mobilização de formas de resolução que advém a necessidade do profissional de educação possuir uma compreensão básica dos métodos e estilos de investigação, tais como:

- Estudos Correlacionais e Estudos causal comparativos;
- Investigação-acção;
- Estudos quasi-experimentais;
- Estudos de caso;
- Investigação narrativa;
- Estudos mistos;
- Estudos de Avaliação.

A Investigação-acção tem adquirido, ao longo dos últimos tempos, uma grande relevância. Segundo Serrano (1990), a Investigação-acção tem contribuído para a criação de um clima de revisão e transformação de determinadas questões da realidade educativa.

Este estilo de investigação permite superar algumas das discrepâncias existentes entre o binómio teoria-prática possibilitando melhorias significativas no que diz respeito à qualidade da educação. Através da Investigação-acção o professor indaga acerca do seu próprio trabalho o que lhe permite focalizar problemas, determinar a sua etiologia e mobilizar estratégias que permitam superá-los, potenciando todo o processo de ensino e aprendizagem.

Existem diferentes definições de Investigação-acção, sendo algumas delas apresentadas em seguida.

"Procedimento essencialmente *in loco*, com vista a lidar com um problema concreto localizado numa situação imediata".

Cohen e Manion (1989, p. 223)

Desta forma o processo é constantemente controlado passo a passo, durante períodos de tempo variáveis, através de diversos mecanismos, tais como questionários, entrevistas e estudos de caso, de modo que os resultados subsequentes possam ser traduzidos em modificações, ajustamentos, mudanças de direcção, redefinições, de acordo com as necessidades, de modo a trazer vantagens duradouras ao próprio processo em curso.

Deste modo, a Investigação-acção caracteriza-se por uma continuidade do trabalho, em que os participantes observam, indagam e focalizam determinados aspectos através de reajustes constantes que melhoram a qualidade e adequabilidade da sua prática.

"O investigador formula primeiramente princípios especulativos, hipotéticos e gerais em relação aos problemas que foram identificados".

Brown e McIntyre (1981, p. 245)

A partir destes princípios, podem ser depois produzidas hipóteses quanto à acção que deverá mais provavelmente conduzir, na prática, aos melhoramentos desejados.

Essa acção será então experimentada e posteriormente recolhida a informação correspondente aos seus efeitos. Estas informações serão utilizadas para rever as hipóteses preliminares e para identificar uma acção mais apropriada que já reflicta uma modificação dos princípios gerais. A recolha de informação sobre os efeitos desta nova acção poderá gerar hipóteses posteriores e alterações dos princípios, e assim sucessivamente, contribuindo assim para a aproximação de um maior entendimento e melhoramento da acção. Isto implica um processo contínuo de pesquisa e o valor do trabalho é julgado pelo que se tiver conseguido em termos de compreensão, bem como das alterações desejáveis na forma de agir.

Este estilo de investigação torna-se apelativo e motivador na medida em que coloca a tónica na componente prática e na melhoria das estratégias de trabalho utilizadas, o que conduz a um aumento significativo na qualidade e eficácia da prática pedagógica desenvolvida.

O método de Investigação-acção assenta num conjunto de características, tais como:

- Prática e Interventiva – tem como objectivo lidar com problemas reais, procurando diagnosticar um problema num contexto específico e solucioná-lo nesse mesmo contexto. A mudança é vista como parte integrante da investigação;
- Participativa e Colaborativa – implica todos os intervenientes no processo. O investigador é o principal interveniente no processo de investigação, sendo a sua participação activa;
- Cíclica – envolve um conjunto de ciclos, nos quais as descobertas iniciais geram possibilidades de mudança, que são então implementadas e avaliadas como introdução do ciclo seguinte;
- Auto-Avaliativa – as modificações são continuamente avaliadas e monitorizadas, numa perspectiva de flexibilidade e adaptabilidade.

Segundo Kuhne e Quigley (1997), a Investigação-acção é um processo cíclico, que implica três fases:

- Planificação – envolve a definição do problema, a definição do projecto e o processo de medição;
- Acção – envolve a implementação do projecto e o processo de observação;
- Reflexão – envolve o processo de avaliação.

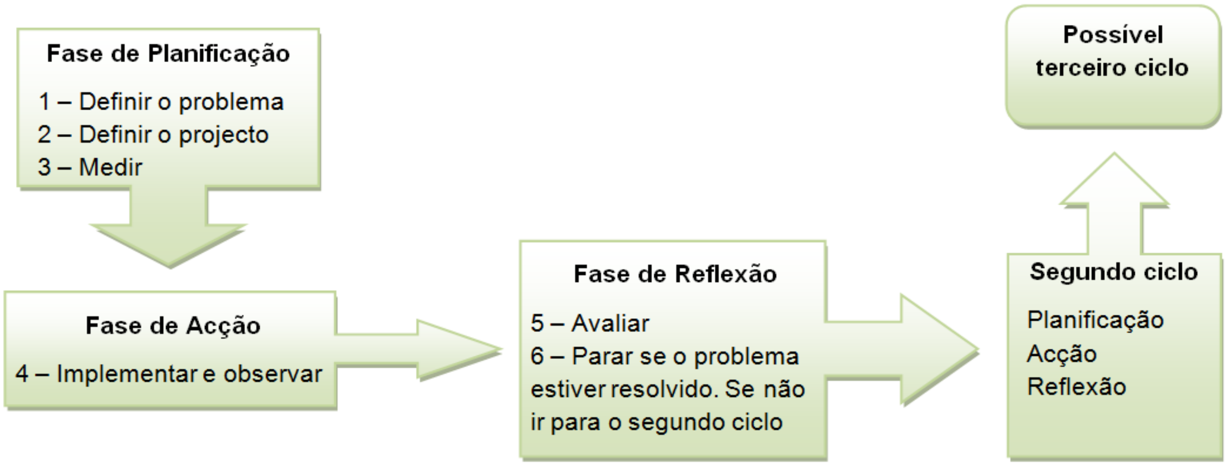


Figura n.º 1 - Fases da Investigação-acção apresentadas por Kuhne & Quigley (1997).

Se na última fase não se encontrar a solução do problema, parte-se para o segundo ciclo. A fase de reflexão necessita de ser sistematizada para poder ser considerada investigação.

No que diz respeito ao papel do aluno como investigador, existem quatro abordagens diferentes ao conceito de investigação matemática:

- *As investigações são parte integrante da actividade matemática.*

  A actividade matemática dos alunos deve consistir essencialmente em experienciar um tipo de trabalho como o dos matemáticos profissionais. Neste, a investigação é uma actividade central e o ensino da Matemática deve dar relevância à realização de actividades de investigação por parte dos alunos.

- *Comparar as características das investigações com as de outras actividades como a resolução e formulação de problemas.*

  Numa abordagem de resolução de problemas, cabe ao professor colocar o problema enquanto o aluno tem a tarefa de encontrar uma forma, um caminho que lhe permita chegar à solução. Numa abordagem pedagógica de investigação, o professor pode escolher a situação de partida ou aprovar a escolha do aluno, mas é a este que cabe a formulação de questões, definindo assim os seus próprios problemas dentro da situação proposta.

- *Caracterizar uma investigação a partir dos processos matemáticos que nela estão envolvidos e nas suas relações.*

  Investigar significa formular boas questões e usar processos e conhecimentos matemáticos que permitam tomar decisões sobre essas questões. Esta actividade envolve diversos processos matemáticos, tais como a formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste de conjecturas, a prova das conjecturas que resistiram a sucessivos testes, que interagem entre si.

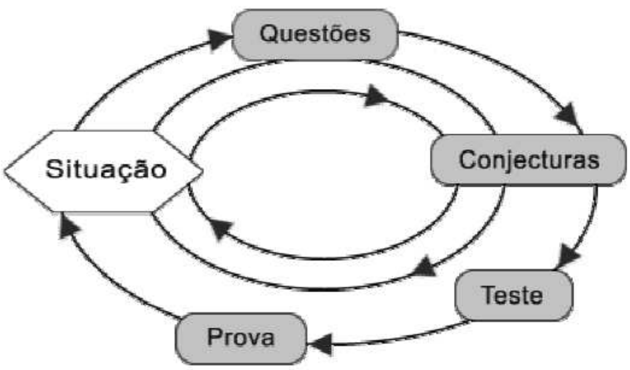


Figura n.º 2 - A actividade de investigação (Oliveira, 1998, p. 15)

- *Explicar o que é uma investigação a partir de exemplos, de contra-exemplos ou das características dos contextos discursivos aliados às referências curriculares sobre as investigações.*

  Pode-se exemplificar, dizer aquilo que ela não é ou identificar características de diferentes discursos associados às investigações.

De uma forma geral, em todas estas abordagens ao conceito de investigação, se refere o ***processo*** – nelas é mais importante o processo do que o conteúdo –, a ***abertura*** – admitem várias possibilidades de exploração –, a ***criatividade*** e o facto de constituírem exemplos do que é a verdadeira Matemática.

3.3 – A Investigação Matemática no Domínio da Geometria

Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares.

Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em "receitas" para resolver exercícios tipo.

Segundo Abrantes (1999), a riqueza e variedade da geometria constituem, de facto, argumentos muito fortes para a sua valorização no currículo e nas aulas de Matemática:

- Em geometria, contacta-se com uma grande variedade de objectos e situações. Trabalha-se no plano ou no espaço, com figuras planas ou com poliedros, por exemplo, podendo descobrir-se e explorar-se um grande número de propriedades e conexões. A relação entre situações da realidade concreta e situações matemáticas encontra na geometria inúmeros exemplos e concretizações.

- A geometria é uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos; envolvendo transformações geométricas; em torno das ideias, de forma e de dimensão; implicando conexões com outros domínios da Matemática, como os números, a álgebra, o cálculo combinatório, a análise; apelando a processos de "organização local" da

Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades.

- As actividades investigativas em geometria conduzem rapidamente à necessidade de se lidar com diversos aspectos essenciais da natureza da própria Matemática. Formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar descobertas e justificações, tornam-se processos naturais. Ao mesmo tempo, surgem oportunidades para se discutir o papel das definições e para se examinar as consequências de se adoptar uma ou outra definição, assim como para se compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática. Além disso, a geometria oferece numerosas ocasiões para se conhecerem exemplos sugestivos da história e da evolução da Matemática.
- Explorações e investigações em geometria podem fazer-se em todos os níveis de escolaridade e a diversos níveis de desenvolvimento. Este facto tem implicações curriculares evidentes.

3.4 - O Pensamento Visual-Espacial em Educação Matemática

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico, Ponte, (2007), o propósito principal do ensino da Geometria é o desenvolvimento, nos alunos, do sentido espacial. No entanto, tal como acontece com o sentido de número, não é simples definir sentido espacial. Vários autores têm vindo a desenvolver trabalho nesta área, mas não existe consenso relativamente à terminologia usada. Aptidão espacial, orientação espacial e raciocínio espacial são alguns exemplos de designações diferentes usadas em textos sobre sentido espacial.

Battista (2007, p. 843), em particular, refere que o raciocínio espacial se prende com "a capacidade de "ver", examinar e reflectir sobre objectos espaciais, imagens, relações e transformações". Inclui gerar imagens, analisá-las de modo a responder a questões a elas respeitantes, transformar e operar com imagens e colocar essas imagens ao serviço de outras representações mentais.

Outros autores (por exemplo, Nes & de Lange, 2007), associam o sentido espacial à visualização espacial, à compreensão de formas e figuras geométricas, suas propriedades e relações e à orientação espacial.

Na aprendizagem da geometria, a capacidade espacial (ou sentido espacial) é essencial, especialmente em tarefas como visualizar objectos, comparar figuras com diferentes orientações, seguir direcções, fazer diagramas, ler tabelas, ler mapas, etc.

A capacidade espacial, que até é mais um conjunto de capacidades, diz respeito à forma como os alunos, ou as pessoas em geral, percepcionam o mundo que os rodeia e a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objectos (Matos e Serrazina, 1996). Este sentido espacial envolve diversas subcapacidades, que Ponte e Serrazina (2000) sistematizam e definem desta forma:

- ***Coordenação visual motora*** – capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo;
- ***Memória visual*** – capacidade de recordar objectos que já não estão à vista;
- ***Percepção figura-fundo*** – capacidade de identificar uma componente específica numa determinada situação e que envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos;
- ***Constância perceptual*** – capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas;
- ***Percepção da posição no espaço*** – capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes;
- ***Percepção de relações espaciais*** – capacidade de ver e imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou em relação connosco;
- ***Discriminação visual*** – capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objectos.

A teoria de van Hiele, desenvolvida nos anos 50 do século XX por Dina e Peter van Hiele, casal holandês, propõe uma progressão na aprendizagem deste tópico através de cinco níveis de complexidade crescente. Esta progressão é determinada pelo ensino, pelo que o professor tem um papel primordial na definição de tarefas adequadas para os alunos poderem progredir para níveis superiores de pensamento geométrico:

Níveis de aprendizagem da Geometria (segundo van Hiele)

N1) ***Visualização*** – Os alunos compreendem as figuras globalmente, isto é, as figuras são entendidas pela sua aparência;

N2) ***Análise*** - Os alunos entendem as figuras como o conjunto das suas propriedades;

N3) ***Ordenação*** - Os alunos ordenam logicamente as propriedades das figuras;

N4) ***Dedução*** - Os alunos entendem a Geometria como um sistema dedutivo;

N5) ***Rigor*** - Os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a Geometria.

Para além destes níveis, este modelo possui algumas propriedades particulares limitadoras nas construções das metodologias de ensino a serem aplicadas pelos professores/educadores:

- ***Sequencial*** - o avanço nos níveis acontece de maneira sucessiva e cada nível vencido será a base para o avanço ao nível seguinte;
- ***Avanço*** - a idade do indivíduo não é o principal factor determinante no avanço dos níveis, e os conteúdos e os métodos empregados são considerados factores mais relevantes;
- ***Intrínseco e Extrínseco*** - os objectos de conhecimento inerentes de um determinado nível serão os objectos de ensino para o nível seguinte;
- ***Linguística*** - a linguagem geométrica avança paralelamente aos níveis;
- ***Combinação Inadequada*** - o avanço do aluno depende da sua adequação ao nível oportuno, ao material didáctico, ao conteúdo e à linguagem do professor.

Relativamente à aprendizagem, os níveis do Modelo de van Hiele deverão ser planeados e executados pelo professor, tendo em conta cinco fases de aprendizagem. Estas fases correspondem aos períodos que os aprendizes precisam de transpor enquanto estiverem num determinado nível até atingir o próximo. Essas fases de aprendizagem são as seguintes:

Fases	**Objectivo**	**Papel do professor**
1ª) Informação	Conhecer o conteúdo do domínio.	Apresentar e analisar materiais que clarifiquem o conteúdo do domínio, colocando-os à disposição dos alunos.
2ª) Orientação guiada	Descobrir redes de relações entre os objectos que estão a manipular.	Orientar a actividade dos alunos,

		guiando-os através de explorações que os conduzam às descobertas.
3ª) Explicitação	Consciencializar relações e exprimi-las por palavras próprias.	Promover e orientar discussões entre os alunos, levando-os a utilizar linguagem técnica adequada.
4ª) Orientação livre	Aplicar relações e resolver problemas.	Seleccionar materiais e problemas (com várias vias de solução). Apoiar os alunos na sua resolução. Introduzir termos, conceitos e estratégias de resolução de problemas.
5ª) Integração	Sumarizar conhecimentos e integrá-los numa rede coerente de fácil aplicação.	Encorajar os alunos a reflectirem e a consolidarem o seu conhecimento geométrico.

No final da quinta fase, os alunos devem ter alcançado um novo nível de pensamento, estando aptos a repetir as fases de aprendizagem no nível seguinte.

A teoria de van Hiele sugere que o pensamento geométrico evolui de modo lento desde as formas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais onde a intuição e a dedução se vão articulando. Os alunos começam por reconhecer as figuras e diferenciá-las pelo seu aspecto físico e só posteriormente o fazem pela análise das suas propriedades. Assim, é importante que ao nível dos primeiros anos se privilegie a abordagem intuitiva e experimental do conhecimento do espaço e do desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico em ligação com as propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas.

Na literatura encontramos termos como visualização, pensamento visual, raciocínio visual, raciocínio espacial, pensamento espacial para nomear actos mentais que estão relacionados com o pensamento que combina o visual com o espacial – Pensamento Visual-Espacial.

Em matemática “visualização constitui um aspecto importante da actividade matemática onde se actua sobre representações concretas enquanto se descobrem as relações abstractas que interessam ao matemático” (Guzmán, 1996, p. 16).

Do ponto de vista da educação matemática “visualização inclui duas direcções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica” (Dreyfus, 1990, p. 119). “Visualização é a relação entre imagens” (Solano e Presmeg, 1995, p. 67).

Estas definições convergem na medida em que a visualização se foca na percepção e manipulação de imagens visuais.

Muitos investigadores ligados à educação matemática têm dado ênfase à importância da visualização e do raciocínio visual na aprendizagem da matemática (Bishop, 1989; Dörfler, 1991; Presmeg, 1989, Zimmerman and Cunningham, 1991) e alguns sugerem que o pensamento visual pode ser uma alternativa e uma fonte poderosa para os estudantes fazerem matemática (Goldenberg, 1991).

Cunningham (1991, p. 70) descreve os benefícios da visualização como incluindo: “a capacidade de se focar em capacidades específicas e em pormenores de problemas muito complexos para mostrar a dinâmica de sistemas e processos, e para aumentar a intuição e a compreensão de problemas e processos matemáticos”.

Barwise e Etchemendy (1991, p. 16) esboçam três modos em que o raciocínio visual pode ser considerado como raciocínio válido: “i) a informação visual é parte de uma dada informação da qual raciocinamos; ii) a informação visual pode ser parte do próprio raciocínio; iii) representações visuais podem desempenhar um papel na conclusão de uma peça de raciocínio.

A componente visual do raciocínio matemático necessita de ser apresentada ao lado do simbólico para capacitar os estudantes a desenvolverem mais do que uma mera compreensão mecânica de conceitos, ideias e processos matemáticos.

Analogamente Zimmerman e Cunningham (1991) dão ênfase à necessidade de uma abordagem multifacetada das ideias matemáticas. Eles defendem que a visualização matemática não é só uma apreciação matemática através de figuras, um substituto superficial da compreensão. Em vez disso sustentam que a visualização dá profundidade e significado à compreensão servindo de guia para a resolução de problemas e inspirando descobertas criativas. Para se atingir aquele nível de compreensão, eles propõem que a visualização não está isolada do resto da matemática, implicando que as representações visuais, numéricas e simbólicas de ideias devem ser explicitadas e ligadas.

Apesar de alguns estudos apontarem o potencial de abordagens visuais para a aprendizagem matemática e para a resolução de problemas, os estudantes mostram frequentemente relutância em usar a visualização para processar informação matemática (Eisenberg e Dreyfus, 1991) e, sempre que possível, usam uma estrutura simbólica para processar a informação e abordar os problemas. Noss, Healy e Hoyles (1997) dizem que, mesmo que essa relutância possa ser ultrapassada, a incorporação de visualizações na actividade matemática acarreta um conjunto de exigências cognitivas. Eles referem que muitos estudantes têm dificuldades em “ler” diagramas e reconhecer as transformações implicadas nelas; que quando imagens visuais poderosas estão presentes, os estudantes preferem resolver problemas por percepção em vez de mobilizarem o conhecimento matemático; e que os estudantes fogem a construir ligações entre as suas visualizações e o pensamento analítico.

Em geometria, a visualização tem três funções, cobre conjuntamente a apreensão operativa, discursiva e perceptiva de uma figura como uma representação do espaço.

4 - Metodologia

Nas indicações metodológicas do tema Geometria no Plano e no Espaço, do 10º ano, aconselha-se que o professor privilegie, se possível através de pequenas investigações, o estudo do cubo (incluindo as secções nele determinadas por planos que o intersectem) assim como o estudo de alguns poliedros cujas arestas ou vértices estão assentes nas suas faces. É conveniente que o aluno fique a saber desenhar representações planas dos sólidos com que trabalha, a descrever a intersecção do cubo com um plano dado, a saber construir e a desenhar uma representação da intersecção obtida, assim como compondo e decompondo figuras no plano ou no espaço, o aluno deve saber calcular ou relacionar áreas, assim como volumes.

Mesmo quando o aluno resolve um problema por via analítica o professor deve incentiva-lo a fazer uma figura geométrica de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver a sua capacidade de representação, ou seja, não se deve deixar que este se limite à resolução exclusiva de equações e à abstracta utilização de fórmulas.

Estimulando então uma participação activa do aluno no seu processo de construção do conhecimento e pela sua interacção com o artefacto e com os outros, assumi sempre um papel de facilitador da aprendizagem, assente numa lógica de partilha do saber.

Tendo em conta que é fundamental avaliar as capacidades a desenvolver pelos alunos na unidade de Geometria do 10º ano, e particularmente a Visualização no Espaço, foi proposto a realização faseada de um conjunto de actividades, nas quais, e como exemplo, estes eram levados a descobrir quais os poliedros que se obtêm a partir de poliedros regulares convexos, nomeadamente o cubo, o tetraedro e o octaedro, quando se substitui cada face por um vértice, cada vértice por um plano ou cada aresta por um vértice. Para além da visualização espacial e construção geométrica, foi sempre proposto aos alunos nas diferentes etapas a realização de cálculo de perímetros, áreas e volumes associados às secções resultantes dos planos de corte e aos novos sólidos obtidos.

Com a aplicação destas actividades pretendia-se, para além de continuar a desenvolver nos alunos a capacidade de visualização no espaço, testar capacidades de investigação, organização e comunicação escrita e oral.

O procedimento da análise dos dados baseou-se numa avaliação de resultados obtidos quer qualitativos quer quantitativos, integrando a análise e a interpretação das respostas individuais dos alunos, as tarefas de resolução de problemas geométricos realizadas dentro ou fora da sala de aula.

Em todo o processo de realização deste estudo de natureza investigativa foi necessário:

- Propor a actividade a realizar de forma a que esta contemplasse o estudo de secções no poliedro convexo, obtenção de novos sólidos, o desenho de uma planificação de um dos novos sólidos e o cálculo de perímetros, áreas e volumes associadas às secções e aos sólidos quer de partida quer resultantes;
- Avaliar o desempenho dos alunos, a sua progressão relativamente à compreensão e interpretação do enunciado, capacidade para encontrar uma estratégia para a resolução das questões e a sua facilidade/dificuldade na resolução das mesmas.

4.1 - Fases do projecto

Durante a leccionação da unidade de Geometria e em particular no tema Geometria no Plano e no Espaço, nomeadamente os subtemas poliedros regulares, cortes num poliedro convexo por um plano dado, respectivas secções determinadas e planificações de novos sólidos obtidos, e de forma a utilizar as novas tecnologias associadas às aprendizagens dos alunos, foi inicialmente inserida em sala de aula uma estratégia de ensino recorrendo a uma aplicação interactiva do CD da ASA para o 10º ano de Matemática.

Esta aplicação denominada “jogo das secções no cubo”, permite aos alunos praticarem e interiorizarem os conceitos inerentes à determinação de secções no cubo produzidas por um plano de corte.

Através desta aplicação, os alunos visualizam diferentes situações, onde nas arestas do cubo estão assinalados pontos que pertencem ao plano de corte e tendo em conta que um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas, estes determinam a secção produzida no cubo pelo plano de corte, tendo ainda a ajuda de uma ferramenta para traçar paralelas. No final da execução, a aplicação indica se o utilizador obteve, ou não, sucesso e ao fim de quantos cliques.

Está também acessível no CD, através de hiperligações, o recurso ao manual interactivo e a uma janela de ajuda.

De seguida ilustram-se alguns exemplos da potencialidade desta aplicação.

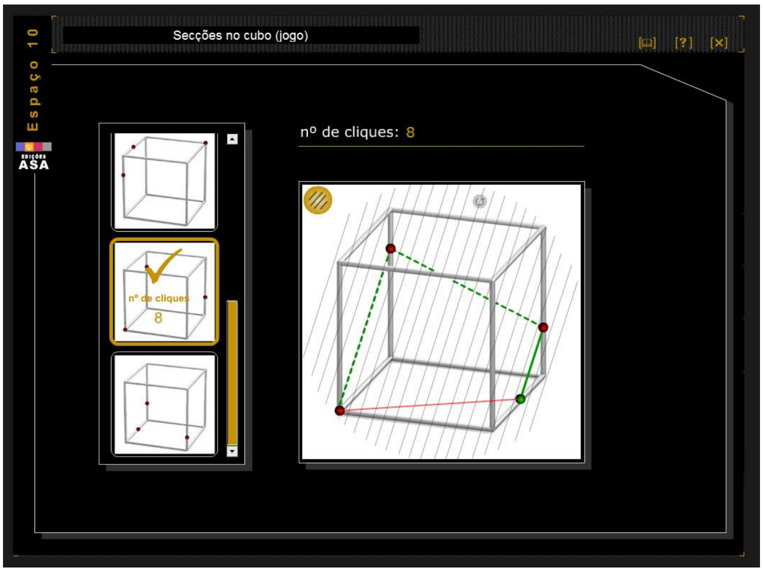


Figura n.º 3 – Determinação da secção no cubo
CD interactivo ASA

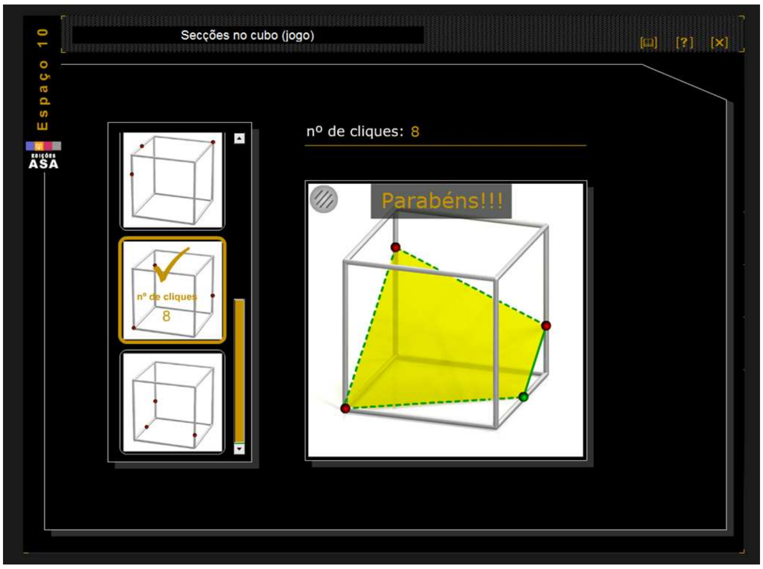


Figura n.º 4 – Conclusão da determinação da secção no cubo
CD interactivo ASA

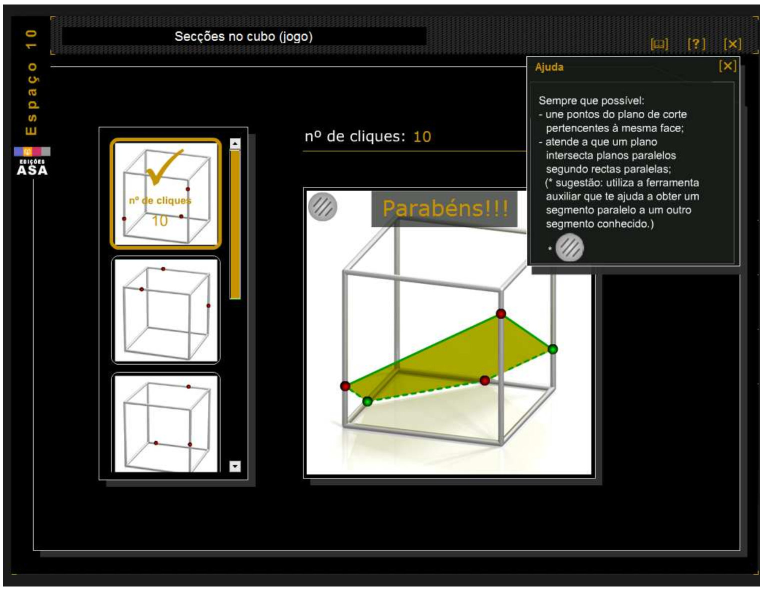


Figura n.º 5 – Conclusão da determinação da secção no cubo
CD interactivo ASA

Em conjunto com esta actividade interactiva, foi distribuída uma ficha de carácter informativo e formativo (Anexo I) que sintetiza o estudo das secções determinadas num cubo por um plano de corte.

No decorrer desta fase das aulas e dos respectivos conteúdos associados, foi pensada e estruturada a aplicação deste projecto que contemplou a realização de tarefas em quatro fases distintas. A realização destas tarefas ocorreu dentro e fora de sala de aula de forma alternada, havendo em ambas as situações uma avaliação criteriosa do desempenho dos alunos e nos casos em que as tarefas foram efectuadas em sala de aula, houve uma observação directa e uma intervenção da minha parte em tentar perceber o que o aluno está a visualizar e percepcionar no memento da resolução dos problemas.

4.1.1 - Primeira Fase

Nesta fase inicial do estudo de natureza investigativa, realizada durante o primeiro período, mais precisamente em Outubro, foi proposto aos alunos, como diagnóstico, a realização de uma ficha de trabalho (Anexo II), em sala de aula, contendo três problemas que assentaram fundamentalmente na interpretação e visualização espacial de truncaturas em sólidos, mais especificamente a partir do cubo intersectado por um plano de corte. Identificar a secção determinada pelo plano de corte, assim como determinar áreas e perímetros dessa secção. Igualmente identificar os sólidos resultantes do corte, determinando áreas e volumes, assim como elaborar uma planificação de um dos sólidos resultantes da truncatura.

4.1.2 - Segunda Fase

Ainda no primeiro período, mas já durante os meses de Novembro e Dezembro, procedeu-se à realização de uma actividade desenvolvida em duas dimensões, trabalho efectuado em aula e trabalho realizado fora de aula.

A actividade denominada “Vamos Descobrir Novos Poliedros” (Anexo IV), foi organizada com seis versões diferentes e estruturada em três partes distintas:

- Escrita, onde foi solicitado aos alunos a resolução de um conjunto de questões relacionadas com truncaturas em sólidos regulares, nomeadamente cubo, tetraedro e octaedro. Identificar a secção e/ou secções determinadas pelo plano de corte, assim como calcular áreas e perímetros dessa secção. Igualmente identificar o sólido resultante da truncatura, determinando áreas e volumes, assim como as respectivas razões de áreas e de volumes relativamente ao sólido de partida. Foi igualmente introduzida a questão algébrica de trabalhar com letras que correspondiam à dimensão da aresta do sólido de partida;
- Construção Geométrica, onde foi solicitado aos alunos a realização de uma planificação e construção do novo sólido obtido pela respectiva truncatura em causa;
- Apresentação oral das tarefas realizadas.

A implementação desta actividade obedeceu a um determinado processo:

- Inicialmente foi estabelecida uma calendarização com tarefas especificamente programadas, tendo a actividade no seu conjunto a duração de aproximadamente um mês;
- Semanalmente os alunos tinham a obrigação de entregar uma proposta de resolução das tarefas programadas, assim como associar um pequeno texto especificando as dificuldades sentidas na realização das mesmas, que foi avaliada pelo professor e entregue ao aluno na aula seguinte;
- Desta forma o aluno teve a oportunidade de continuamente reformular o trabalho desenvolvido;

- Entrega do relatório e consequente avaliação deste;
- Apresentação oral sistematizando o conjunto das tarefas realizadas.

4.1.3 - Terceira Fase

Já no segundo período, e mais especificamente no final de Janeiro, foi aplicada uma ficha de trabalho (Anexo VI), realizada fora de sala de aula, cujo conteúdo assentou fundamentalmente nas secções produzidas por truncaturas em poliedros regulares, nomeadamente o cubo e o tetraedro, assim como a representação dessas secções e da planificação do sólido obtido, cálculo de perímetros, áreas e volumes das figuras resultantes, com a inclusão de demonstrações, já que em alguns problemas a dimensão da aresta do poliedro regular era dada por uma letra específica. A realização desta ficha teve como objectivo obter um primeiro termo de comparação e avaliação das aprendizagens adquiridas e das competências desenvolvidas pelos alunos ao longo deste processo.

4.1.4 - Quarta Fase

No terceiro período, foi aplicada, em sala de aula, uma ficha de trabalho (Anexo VIII) que contemplou a determinação de secções produzidas no cubo por um determinado plano de corte, a identificação e o desenho dessa secção, a identificação e caracterização dos novos sólidos obtidos, assim como o desenho em verdadeira grandeza da planificação de um dos sólidos resultantes. Foi igualmente contemplada num terceiro problema a questão da demonstração associada ao cálculo de áreas e volumes de um dos sólidos resultantes do corte.

Nesta última fase do estudo foram efectuadas algumas entrevistas a alunos durante o processo de resolução da ficha de trabalho.

5 - Caracterização da Amostra

O estudo foi realizado numa turma do 10º ano de escolaridade de Matemática A.

A turma inicialmente era constituída por 29 alunos, contudo logo após o inicio do ano lectivo veio a sofrer algumas alterações na sua composição, tendo estabilizado o número de alunos no final de Outubro, e ficando este nos 27, dos quais 14 eram raparigas e 13 eram rapazes, sendo que a maioria tinha 15 anos de idade no arranque do ano lectivo.

6 - Análise dos Dados Recolhidos

Recordando que as principais questões colocadas na realização deste estudo são:

- perceber a dificuldade que os alunos demonstram nos problemas de visualização espacial e construção geométrica, relacionados com truncaturas em poliedros regulares e consequentemente a obtenção de novos sólidos;
- analisar quais as dificuldades que os alunos revelam na realização da planificação de um dos sólidos resultantes do corte;
- analisar as dificuldades no cálculo de áreas e de volumes dos sólidos de partida e dos novos sólidos obtidos.

E tendo em conta que as técnicas de investigação são conjuntos de procedimentos bem definidos, destinados a produzir um conjunto de resultados, procedi então ao tratamento da informação recolhida durante a realização das diferentes etapas propostas aos alunos.

Relativamente ao tratamento da informação, esta foi traduzida de forma quantitativa e qualitativa. Os resultados quantitativos são apresentados de forma gráfica e os resultados qualitativos são demonstrados através de excertos das respostas dos alunos, que de certa forma traduzem aspectos particulares ou mais gerais do seu pensamento e raciocínio, e de uma forma geral foi feita uma avaliação dos resultados obtidos em cada uma das fases do projecto.

6.1 - Dados da primeira fase

No decorrer das aulas e até ao momento da realização desta primeira etapa do estudo, tinha vindo a ser leccionado na unidade de geometria do plano e do espaço, os subtemas dos poliedros regulares e das secções, com recurso aos seguintes materiais pedagógicos:

- manual adoptado com consequente resolução de exercícios e problemas propostos;
- modelos geométricos em acrílico;
- construção de sólidos regulares através de polydrons;
- determinação de secções nos sólidos construídos com o auxílio de elásticos para a sua visualização;
- utilização da aplicação interactiva “secções no cubo” do CD da ASA.

As aulas leccionadas contemplavam um misto de exposição teórica dos conceitos, assim como, permitiam aos alunos a experimentação dos conteúdos em causa.

Nesta primeira etapa os alunos foram submetidos à realização de uma ficha de trabalho, de diagnóstico (anexo II), efectuada em sala de aula, constituída por três problemas, nos quais o sólido de partida foi sempre o cubo, e nas diferentes questões existia um plano de corte, sendo solicitado aos alunos a identificação e caracterização de um dos sólidos resultantes do corte, a realização de uma planificação deste e questões relacionadas com cálculo de perímetros, áreas e volumes.

Após a realização e consequente avaliação desta actividade constatou-se que os resultados obtidos foram na realidade fracos, sendo a classificação média de aproximadamente 6,8 valores, numa escala de 0 a 20 valores. Num total de 26 alunos que realizaram esta actividade, apenas seis obtiveram resultados positivos, onde o melhor resultado não foi além dos 14,25 valores. Destaca-se igualmente o número de alunos que obteve resultados inferiores à média, que por si só já é bastante baixa, perfazendo este um total de 13 alunos, ou seja, 50 % da amostra.

O gráfico seguinte demonstra a realidade obtida nos resultados da avaliação quantitativa desta primeira etapa do estudo.

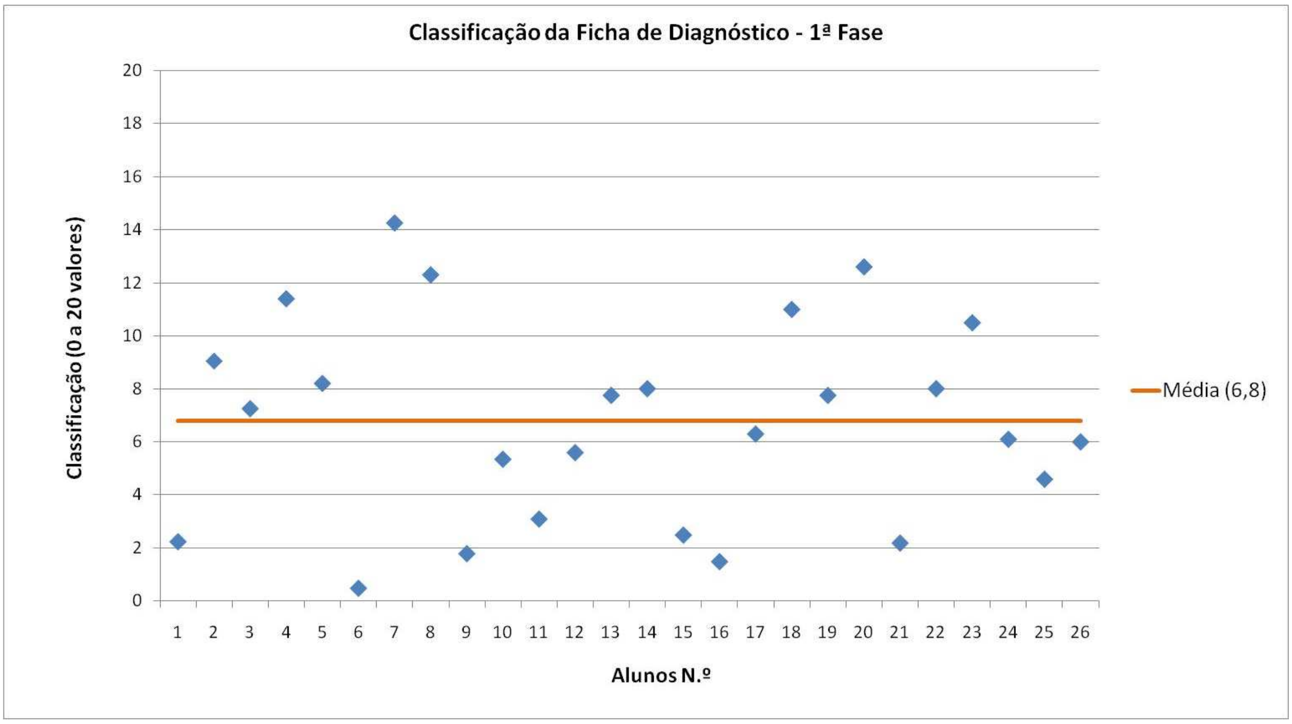


Gráfico n.º 1 – Classificação da ficha de diagnóstico – 1ª fase

Fazendo agora uma análise mais detalhada dos resultados obtidos, de carácter quantitativo e qualitativo, focando com maior pormenor o desempenho dos alunos, na sua capacidade de resolução das questões propostas nesta actividade, desempenho este que se encontra ilustrado no gráfico seguinte.

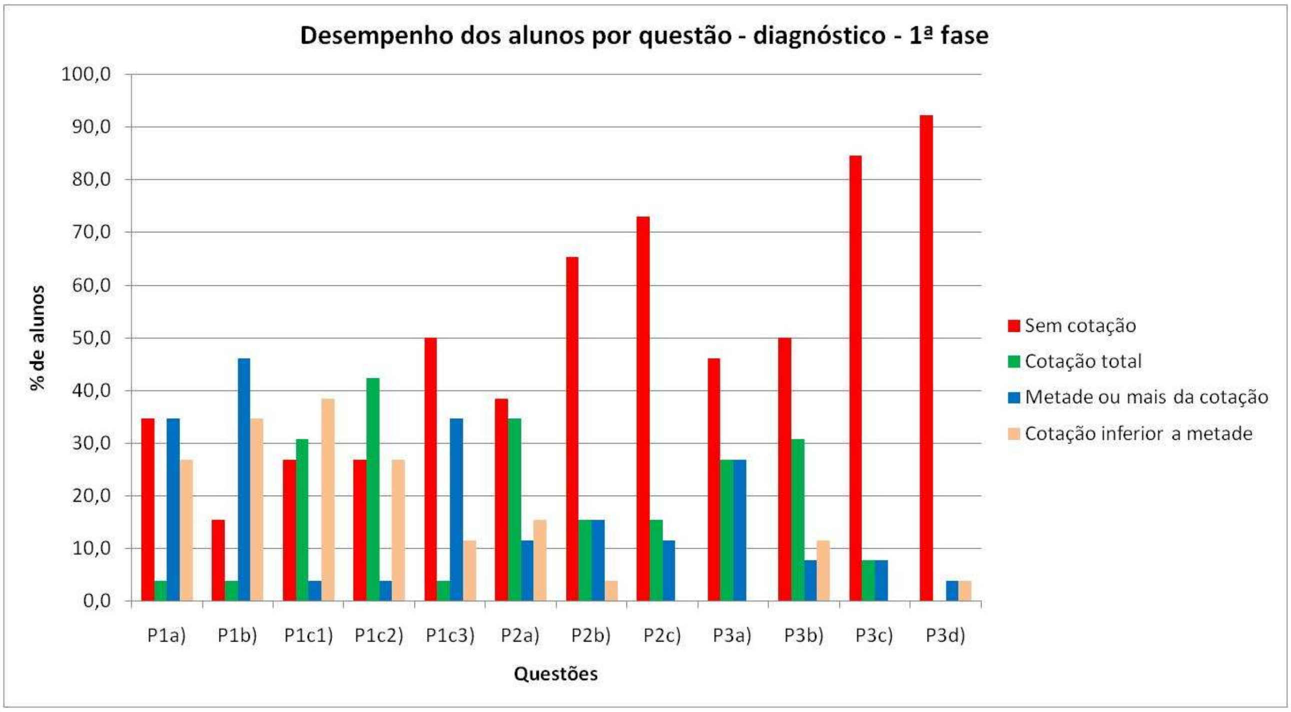


Gráfico n.º 2 – Desempenho dos alunos por questão – 1ª fase

Sendo esta ficha de diagnóstico composta por um total de doze questões, verifica-se que em seis delas, 50 % ou mais, os alunos não resolvem ou a sua resposta está completamente errada.

Em termos de desempenho aceitável destaco as questões P1b) e P1c2) nas quais mais de 40 % têm metade ou mais da cotação ou a cotação total, respectivamente. Nestas duas perguntas, era solicitado aos alunos que identificassem a secção produzida pelo plano de corte em causa e efectuassem o respectivo cálculo de perímetro e área, assim como o cálculo do volume do cubo truncado.

Relativamente às questões nas quais os alunos revelaram pior desempenho, começo por destacar a questão P1c3) na qual se pedia para o aluno desenhar uma planificação da pirâmide triangular [IJKE] que resultava da intersecção de um plano de corte num cubo, como se ilustra na figura seguinte.

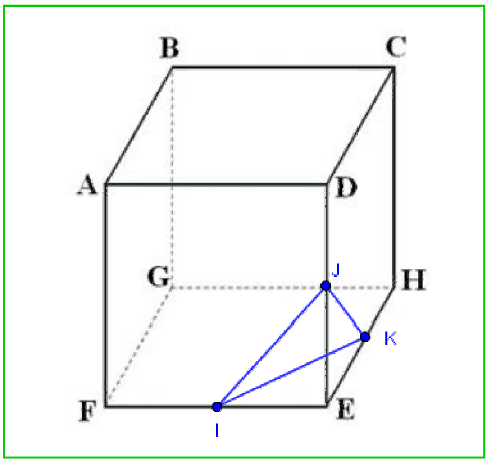


Figura n.º 6 – Imagem da questão P1c3 da ficha de diagnóstico

Nas resoluções propostas pelos alunos surgem situações, não correctas, muito diferentes, relativamente às planificações idealizadas por estes. Em seguida apresentam-se alguns exemplos.

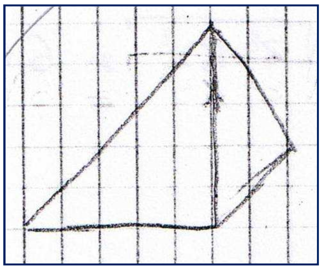


Figura n.º 7 – proposta de resolução do aluno n.º 7 à questão P1c3)

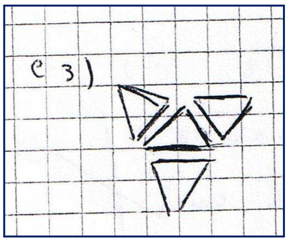


Figura n.º 8 – proposta de resolução do aluno n.º 15 à questão P1c3)

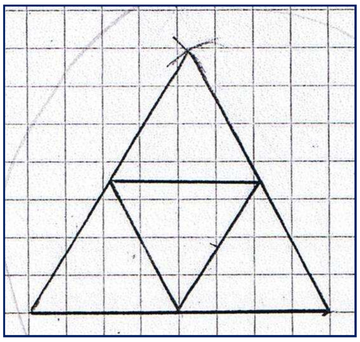


Figura n.º 9 – proposta de resolução do aluno n.º 9 à questão P1c3)

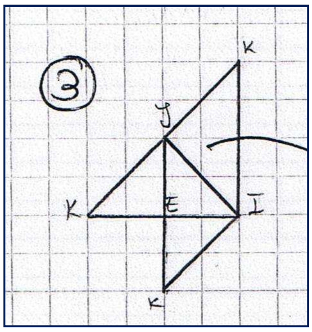


Figura n.º 10 – proposta de resolução do aluno n.º 27 à questão P1c3)

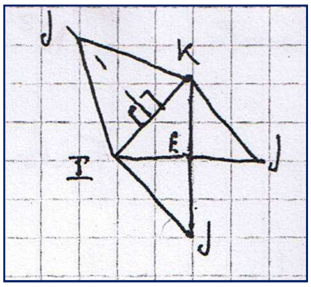


Figura n.º 11 – proposta de resolução do aluno n.º 8 à questão P1c3)

Constatou-se que vários alunos interpretaram a planificação como que um desenho em perspectiva da pirâmide em causa, outros desenharam uma espécie de aproximação de uma planificação de um tetraedro, possivelmente porque este sólido foi estudado e trabalhado durante as aulas. Apenas um aluno desenhou correctamente a planificação da pirâmide, havendo outro grupo de alunos que se aproximou de uma planificação quase correcta, contudo não consideraram a face triangular [IJK] como um triângulo equilátero. Os alunos revelaram imensa dificuldade no raciocínio visual-espacial e na forma como transpõem esse raciocínio para o desenho no plano.

Relativamente às questões P2b) e P2c) nas quais se pedia ao aluno para determinar a secção produzida num cubo por um determinado plano de corte e identificar os sólidos resultantes, e ainda o cálculo do volume dos respectivos sólidos, como se ilustra na figura seguinte.

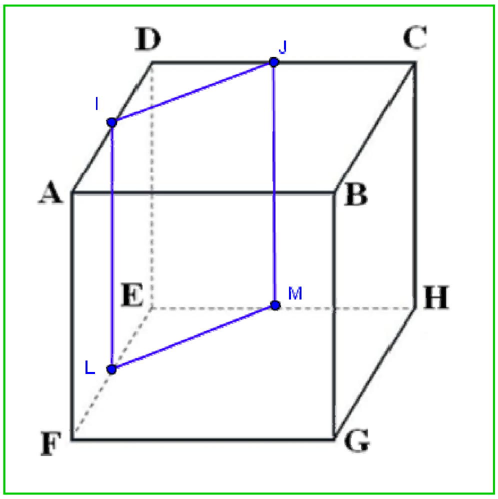


Figura n.º 12 – Imagem da questão P2b) e P2c) da ficha de diagnóstico

Como a secção [IJLM], determinada no cubo pelo plano de corte, é um rectângulo e é paralela à aresta [DE] do cubo, então os sólidos resultantes são dois prismas, sendo um deles, um prisma triangular [IJDELM] e o outro, um prisma pentagonal [AIJCBGHMLF].

A maioria dos alunos realmente construiu a secção correctamente, mas quanto à identificação dos sólidos, o cenário já foi diferente, aparecendo respostas como "pirâmide triangular", "cubo sem o prisma", "prisma rectangular" e "é um trapézio".

No que diz respeito aos volumes, revelaram erros de cálculo e incorrecta aplicação de fórmulas, pois muitos alunos aplicaram a expressão do cálculo do volume de uma pirâmide $\boxed{Vpirâmide = \frac{1}{3} \times Ab \times altura}$ e não a expressão do cálculo do volume de um prisma $\boxed{Vprisma = Ab \times altura}$, factor este que influenciou de forma significativa os resultados obtidos nestas questões.

Mesmo até aqueles que calcularam correctamente o volume do prisma triangular, não o conseguiram fazer para o cálculo do volume do prisma pentagonal, pois utilizaram para o cálculo da área da base do prisma pentagonal a expressão de cálculo de uma área de um polígono regular $\boxed{A = \frac{P}{2} \times apótema}$, e o pentágono em causa é irregular. Contudo também alguns alunos foram mais expeditos e determinaram o volume do prisma pentagonal pela diferença entre o volume do cubo e o volume do prisma triangular.

Relativamente ao aproveitamento e desempenho nas questões P3c) e P3d) este foi quase nulo dado que quase a totalidade dos alunos já não respondeu a estas duas questões, talvez devido ao factor "falta de tempo".

Como primeira fase do estudo, através dos resultados obtidos, verificou-se que os alunos revelaram bastantes dificuldades na visualização espacial, assim como na construção geométrica. Na parte algébrica foi notório o défice de conceitos e procedimentos, que deveriam ser pré-requisitos apreendidos durante o ensino básico.

6.2 - Dados da segunda fase

Esta segunda fase do estudo contemplou um processo mais elaborado e foi estruturada de forma a que os alunos realizassem trabalho dentro e fora da sala de aula, e onde a própria resolução de um conjunto de tarefas propostas foi igualmente faseada.

A actividade denominada “Vamos Descobrir Novos Poliedros” (anexo V), implementada na última parte do primeiro período, contemplou um conjunto de tarefas que se podem agrupar em três etapas distintas:

1ª etapa) Construção geométrica – inicialmente foi solicitado aos alunos que a partir de um poliedro regular, e de acordo com determinados planos de corte, determinassem qual o sólido que se iria obter, fazendo a sua caracterização. Posteriormente, e atribuindo um valor à aresta do sólido de partida, efectuariam os cálculos necessários e procediam à realização da planificação e construção do novo sólido;

2ª etapa) Cálculo de áreas e volumes – nesta fase, com o intuito de analisar as capacidades de demonstração, exigiu-se aos alunos que utilizassem para a dimensão da aresta do poliedro regular de partida uma letra, por exemplo ***a***, e estes foram solicitados a determinar a razão entre as áreas, assim como dos volumes, dos dois sólidos;

3ª etapa) Relatório – nesta última etapa, os alunos tiveram que entregar um relatório que contemplasse a descrição de todo o processo efectuado nas diferentes tarefas a que foram sujeitos.

Analisando de forma quantitativa e qualitativa os resultados obtidos nesta fase do estudo, verificou-se que continuaram a surgir enormes dificuldades na resolução das tarefas propostas, quer de interpretação e construção geométrica, quer no desempenho relacionado com questões algébricas. O gráfico seguinte ilustra os resultados obtidos, em termos de avaliação, nesta segunda fase do projecto de investigação.

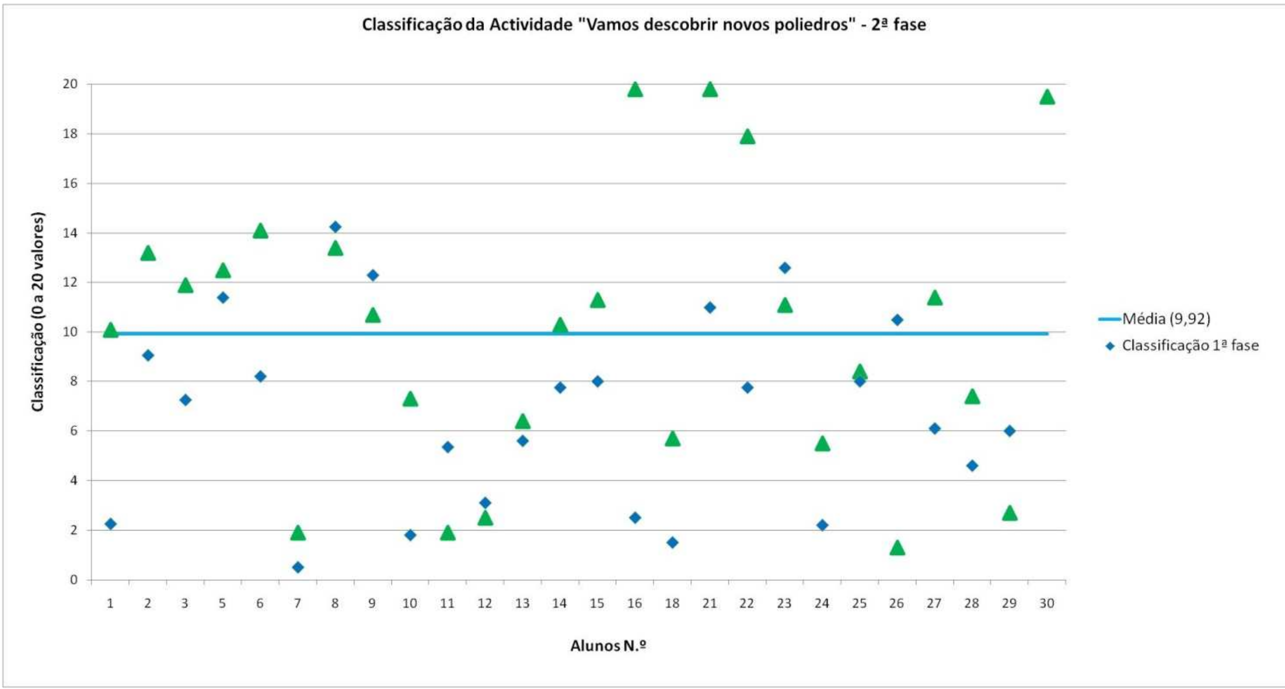


Gráfico n.º 3 – Classificação da Actividade “vdnp” – 2ª fase

De um total de 26 alunos que realizaram esta segunda actividade, 15 obtiveram resultados positivos, dos quais 4 com um desempenho de Muito Bom, sendo a classificação média de aproximadamente 10 valores, numa escala de 0 a 20 valores. Houve ainda 11 alunos que não conseguiram atingir resultados positivos, dos quais 7 têm mesmo resultados muito baixos, ou seja, abaixo dos 6 valores. Aliás, foi nesta altura que começaram a existir flutuações na composição da turma e uma desistência imediata foi da aluna n.º 7, que na realidade tinha vindo a demonstrar um aproveitamento muito fraco na disciplina de Matemática.

Para entender melhor os resultados obtidos, o seguinte gráfico demonstra o desempenho dos alunos face aos critérios de avaliação previstos para a classificação da actividade.

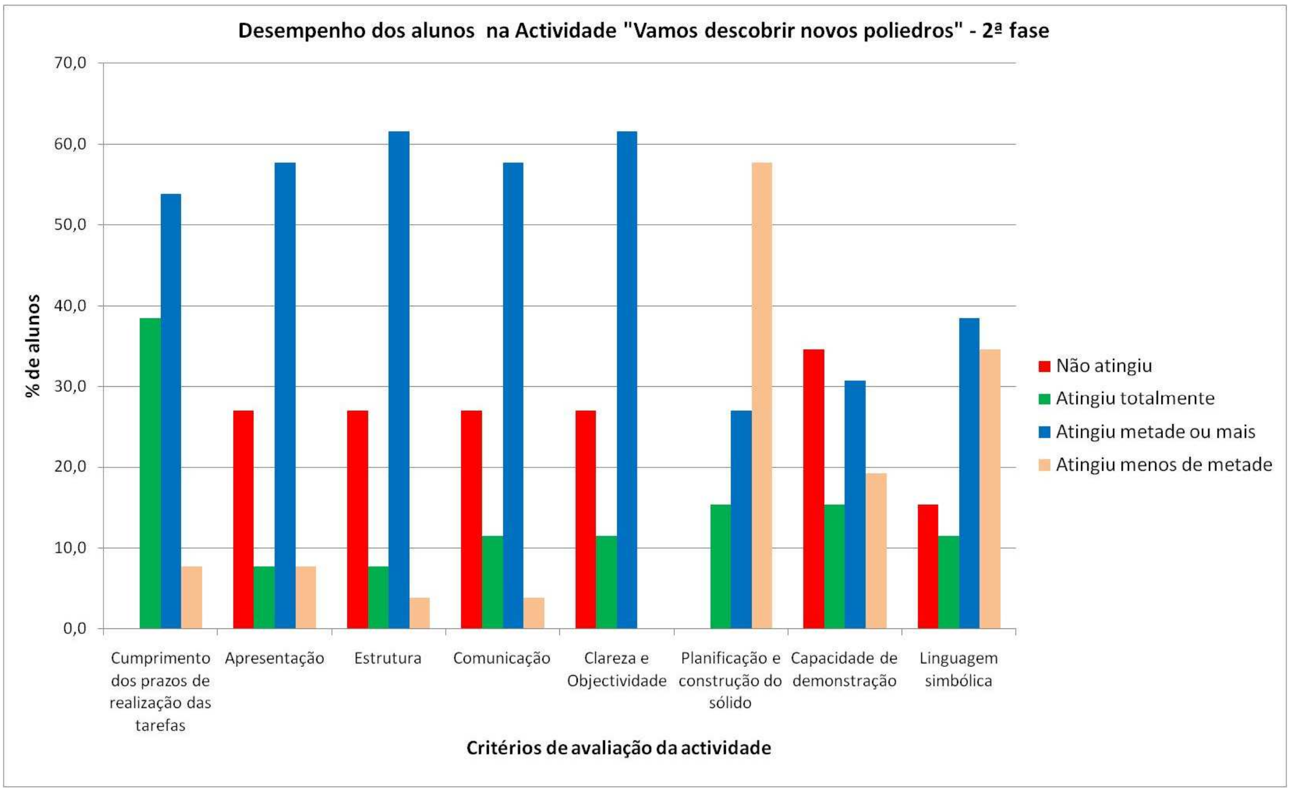


Gráfico n.º 4 – Desempenho dos alunos na Actividade "vdnp" – 2ª fase

Dos critérios de avaliação definidos para esta actividade, as tarefas de planificação e construção do sólido e a capacidade de demonstração eram as que tinham maior peso.

Esta actividade foi estruturada de forma a que inicialmente a tarefa dos alunos era, a partir de um dado poliedro regular, e de acordo com determinados planos de corte, determinassem o sólido resultante, assim como elaborassem a sua planificação e construção, quando, por exemplo, se substitui:

- Uma face pelo seu ponto central;
- Um vértice por um plano;
- Uma aresta pelo seu ponto médio.

Posteriormente a esta tarefa, os alunos foram solicitados a efectuar demonstrações relativas à relação entre áreas, assim como de volumes entre o sólido de partida e o resultante, atribuindo uma letra (***a***, ***b*** ou ***c***) à dimensão da aresta do poliedro regular de partida.

Na primeira etapa, relativa à investigação e ao estudo do sólido resultante, após o aluno concluir sobre o assunto, teria que atribuir uma dimensão exacta à aresta do sólido de partida, e posteriormente efectuar os cálculos necessários para que determinasse as dimensões das arestas do novo sólido, de forma a efectuar a sua planificação e construção. Contudo, verificou-se que muitos dos alunos optaram pela via inversa, ou seja, após descobrirem qual era o novo sólido, atribuíram um valor exacto à dimensão da sua aresta e procederam desta forma à sua planificação e construção geométrica.

Nas actividades propostas, os sólidos de partida e de chegada eram os seguintes.

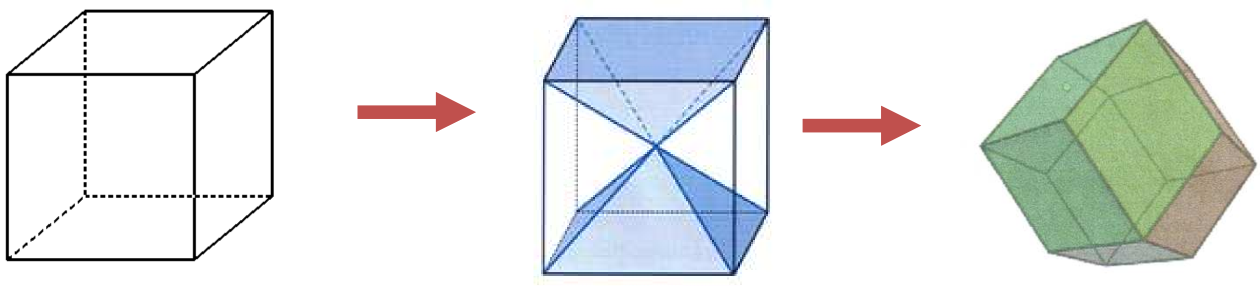


Figura n.º 13 – sólidos da actividade n.º 1 "vdnp"
Cubo → Dodecaedro rômbico

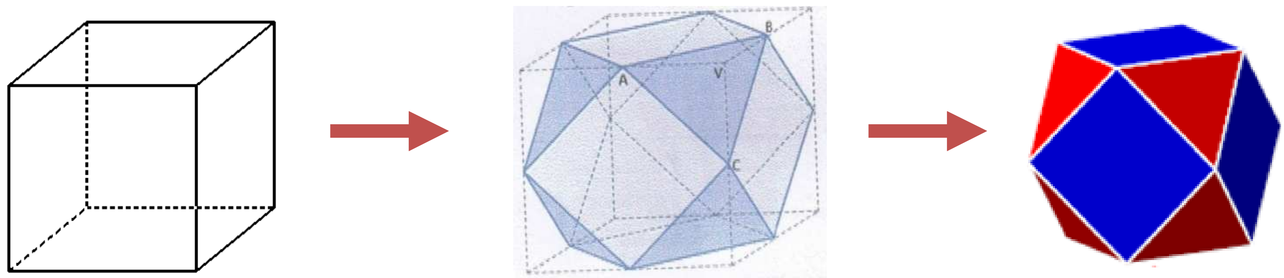


Figura n.º 14 – sólidos da actividade n.º 2 "vdnp"
Cubo → Cuboctaedro

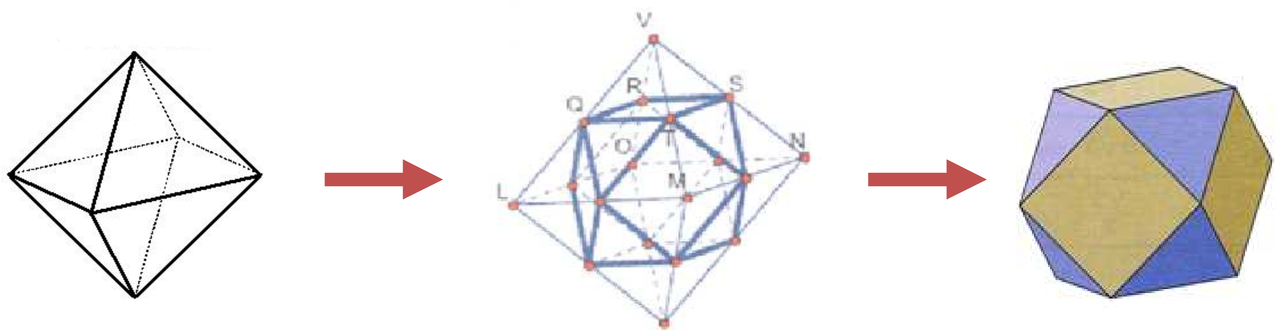


Figura n.º 15 – sólidos da actividade n.º 3 "vdnp"
Octaedro → Cuboctaedro

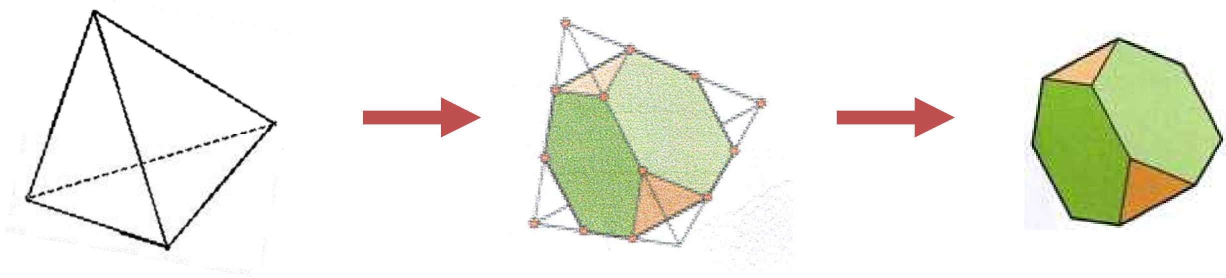


Figura n.º 16 – sólidos da actividade n.º 4 “vdnp”
Tetraedro → Tetraedro truncado

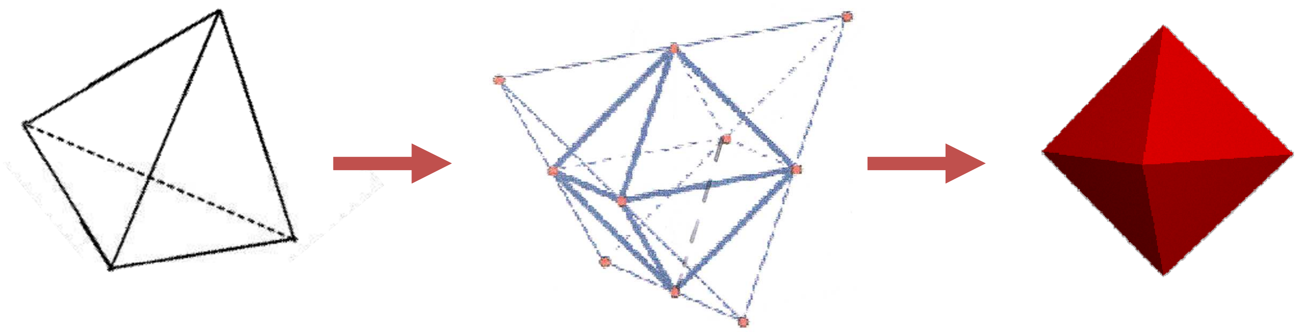


Figura n.º 17 – sólidos da actividade n.º 5 “vdnp”
Tetraedro → Octaedro

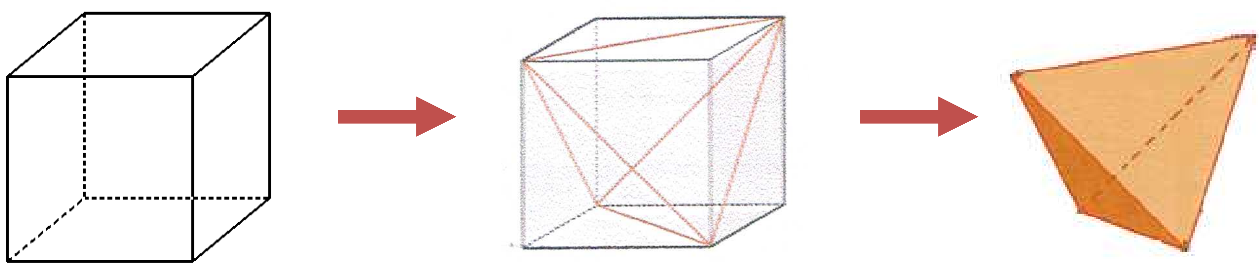


Figura n.º 18 – sólidos da actividade n.º 6 “vdnp”
Cubo → Tetraedro

Durante a realização desta primeira etapa os alunos evidenciaram bastantes dúvidas, nomeadamente no que diz respeito à identificação e caracterização dos sólidos resultantes, quer ao nível do número de vértices e dimensões das arestas, como a forma das próprias faces, havendo mesmo alunos que não conseguiram nesta primeira fase planificar e construir o sólido respectivo. Nas actividades cujo sólido resultante era o cuboctaedro, houve alguns alunos que construíram um sólido, que realmente tinha o número de faces correcto, no entanto as faces não eram todas, polígonos regulares, havendo rectângulos e triângulos isósceles pelo meio.

No decorrer desta fase da actividade pediu-se aos alunos que escrevessem um pequeno parágrafo sobre as dificuldades que sentiram na realização destas tarefas, como tal, apresentam-se de seguida alguns desses relatos.

"Não sei como construir o tetraedro a partir do cubo, sei que as arestas do tetraedro são as diagonais faciais do cubo, se o cubo tiver 6 cm de aresta, as arestas do tetraedro terão a dimensão $\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}$ *cm. Como construir um sólido com raízes?".*

Aluno n.º 1, Actividade 6

"No inicio não percebi bem o exercício porque não sabia para que servia "o valor da aresta do cubo", achei um pouco confuso".

Aluno n.º 8, Actividade 6

"Eu senti a dificuldade de haver 3 triângulos iguais e um diferente e só mais tarde consegui aperceber-me disso".

Aluno n.º 13, Actividade 6

"Senti mais dificuldade em entender como é que se eu substituir cada aresta por um vértice no octaedro vai dar o sólido que está no lado direito".

Aluno n.º 14, Actividade 3

"Tive dificuldade em construir o sólido, esqueci-me de tapar os buracos".

Aluno n.º 24, Actividade 2

"Durante a realização das 2 tarefas o que para mim me atrapalhou mais foi construir o sólido pois era difícil fazer e cortar bem as linhas com as medidas certas".

Aluno n.º 27, Actividade 3

Como o trabalho foi realizado faseadamente, e fazia parte do procedimento os alunos terem a oportunidade de corrigir as suas falhas, então estes voltaram a efectuar os cálculos necessários e construir novamente os seus sólidos, sendo que alguns deles estão ilustrados nas figuras seguintes.

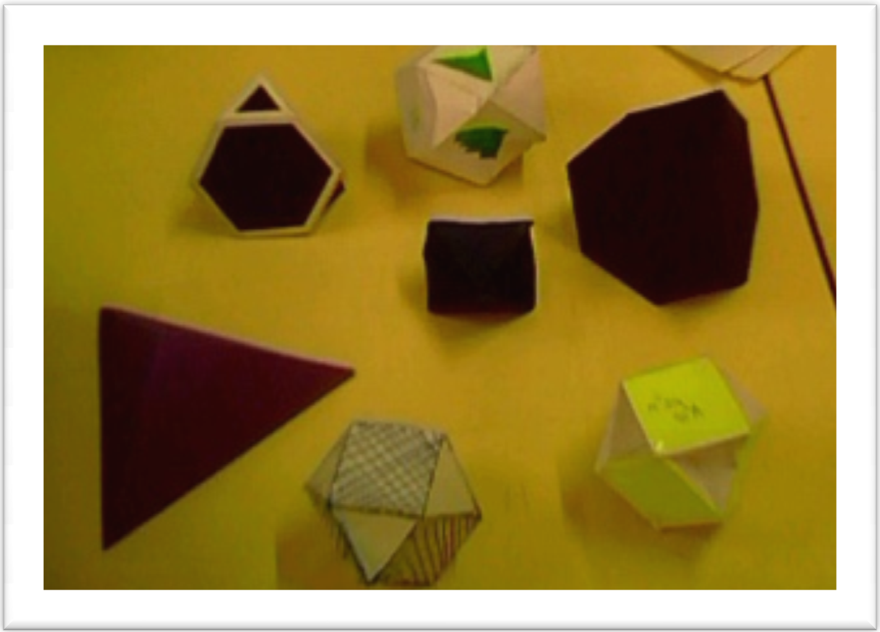


Figura n.º 19 – Foto com sólidos produzidos pelos alunos na actividade "vdnp"

Figura n.º 20 – Foto com sólidos produzidos pelos alunos na actividade "vdnp"

Figura n.º 21 – Foto com sólidos produzidos pelos alunos na actividade “vdnp”

Relativamente ao cálculo algébrico e a sua relação com a interpretação geométrica, à capacidade de demonstração e uso adequado da linguagem simbólica, os alunos revelaram imensas dificuldades em interpretar correctamente as figuras e determinar com exactidão a dimensão das arestas, evidenciaram falta de bases no conceito de semelhança de figuras, dificuldade em trabalhar com letras em vez de números, cometeram erros graves de conceitos e procedimentos, principalmente erros ao operar com radicais, erros na aplicação do Teorema de Pitágoras e resolução de equações.

Apresentam-se de seguida alguns exemplos que evidenciam estas lacunas ao nível do cálculo algébrico.

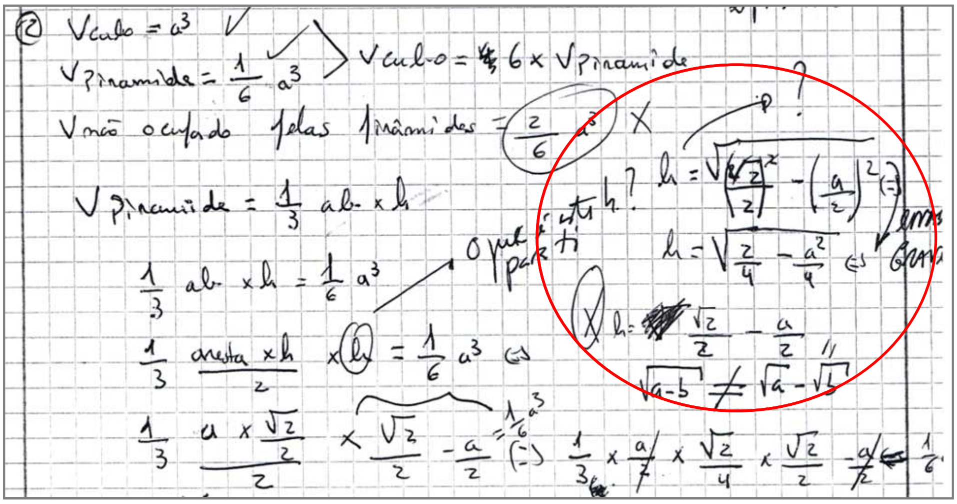


Figura n.º 22 – proposta de resolução do aluno n.º 2 à questão 2 (A1)

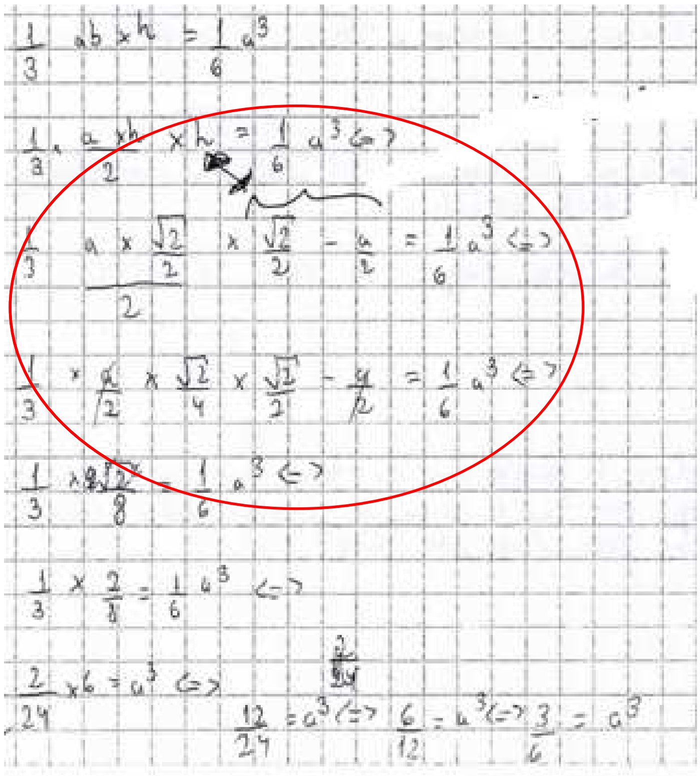


Figura n.º 23 – proposta de resolução do aluno n.º 5 à questão 2 (A1)

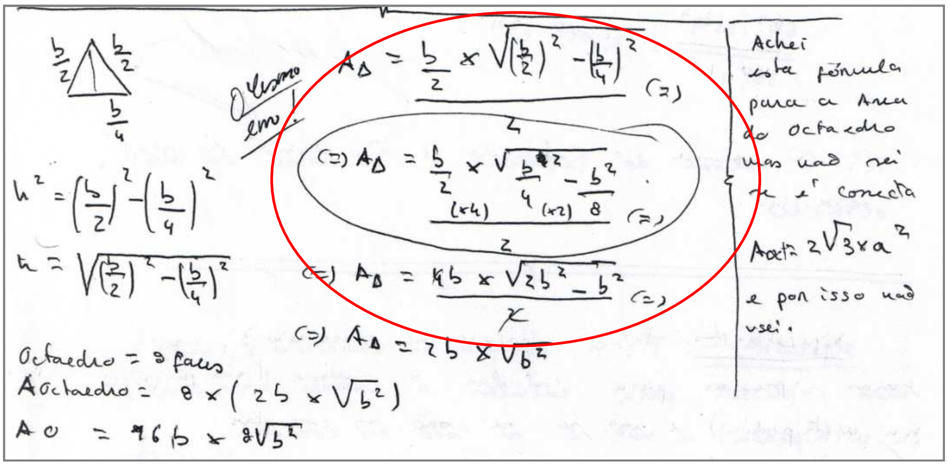


Figura n.º 24 – proposta de resolução do aluno n.º 15 à questão 3 (A5)

Na realidade a maioria dos alunos não conseguiu superar o que lhes foi proposto nas seguintes questões da actividade:

3. Construiu um sólido com dimensões específicas. Agora generalize para uma situação qualquer em que a aresta do sólido de partida é ***a****. Determine a relação que existe entre a área da superfície do sólido de partida e a área do sólido obtido.*

4. Determine a relação entre os volumes do sólido de partida e do sólido obtido.

Também nesta segunda etapa foi pedido aos alunos que relatassem, num pequeno parágrafo, as dificuldades sentidas durante a realização das questões 3 e 4 da actividade "vamos descobrir novos poliedros", e como tal, são apresentadas de seguida algumas dessas citações.

"Não consegui determinar a relação entre as superfícies do cubo e tetraedro, assim como não consegui determinar a relação dos volumes, porque tenho dificuldades em resolver cálculos intermédios".

Aluno n.º 1, Actividade 6

"Não consegui fazer correctamente o ex. 2 e 3, pois tive dificuldades a descobrir o volume da pirâmide e compará-lo devidamente com o volume do cubo. Em relação ao sólido, depois de o construir descobri que altura de cada pirâmide deveria ser metade da aresta do cubo, por isso está mal construído".

Aluno n.º 2, Actividade 1

"Fiquei confuso no ex. 3, usei umas expressões para calcular o volume (que pesquisei na wikipédia) e não sei se são as correctas. De qualquer forma fiquei com a impressão de que os volumes e as áreas ião ser iguais".

Aluno n.º 15, Actividade 5

6.3 - Dados da terceira fase

Devo aqui realçar que esta actividade foi elaborada no sentido de ter já um primeiro termo de comparação e avaliação das aprendizagens adquiridas e das competências desenvolvidas pelos alunos ao longo deste processo.

A ficha de trabalho (anexo VI) aplicada nesta fase do processo contemplou três problemas que incidiam novamente na truncatura de poliedros regulares, onde foi solicitado aos alunos, identificação e caracterização de secções, desenho de uma planificação, cálculo de áreas e volumes associado a pequenas demonstrações.

Após a realização e consequente avaliação desta terceira actividade do projecto, constatou-se que, globalmente, os resultados quantitativos e qualitativos revelaram uma melhoria significativa, verificando-se então uma progressão no desempenho e nas aprendizagens desenvolvidas pelos alunos, sendo a classificação média desta fase de aproximadamente 12,3 valores. Num total de 24 alunos que realizaram esta actividade, dezasseis obtiveram resultados positivos, dos quais treze acima da média e ainda neste grupo específico, existem seis alunos com classificação de Muito Bom. No entanto, existem ainda cinco alunos que nunca conseguiram alcançar um resultado positivo durante as três primeiras fases do projecto e verificou-se também que alguns alunos, mesmo com positiva, baixaram o seu rendimento da 2ª para a 3ª fase.

O gráfico seguinte demonstra a realidade obtida nos resultados desta terceira etapa do estudo, incluindo também os resultados das actividades anteriores.

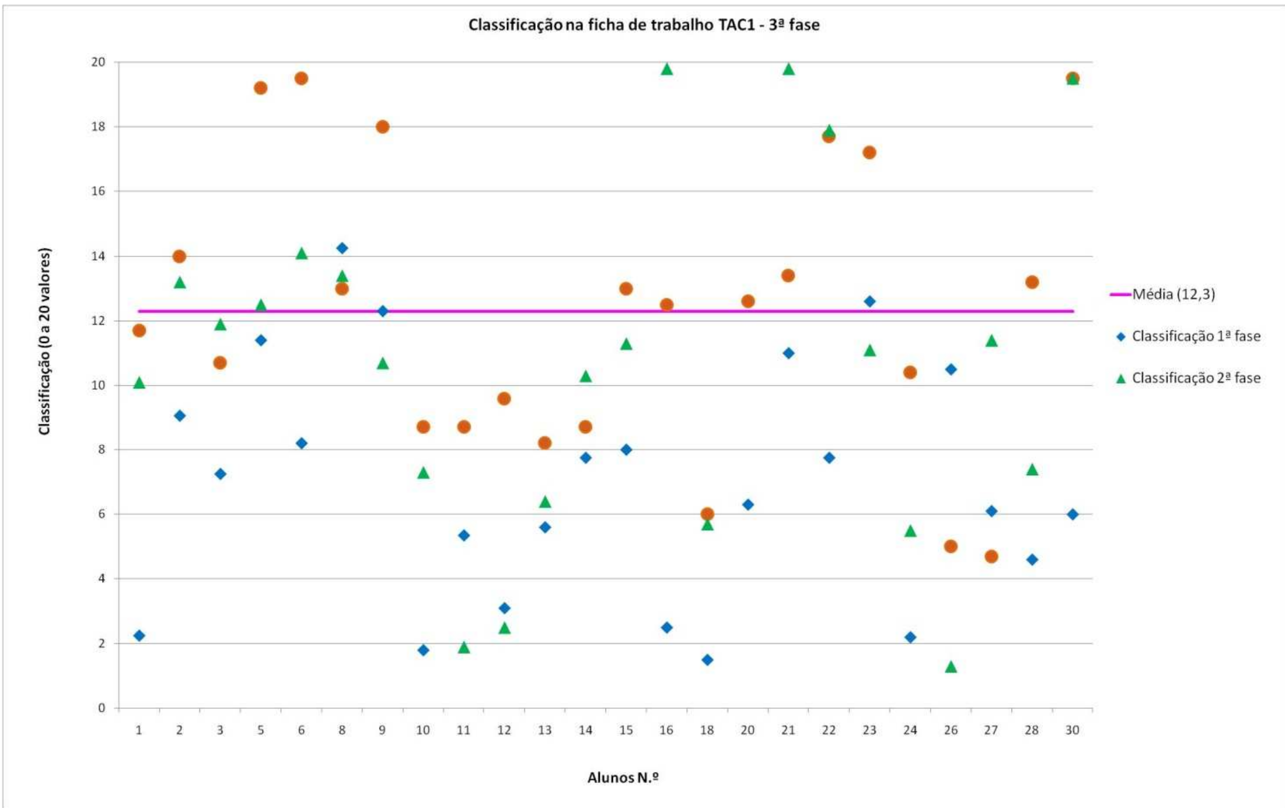


Gráfico n.º 5 – Classificação da ficha TAC – 3ª fase

No que diz respeito ao desempenho dos alunos na resolução das questões propostas nesta actividade, podemos verificar no gráfico seguinte os resultados obtidos.

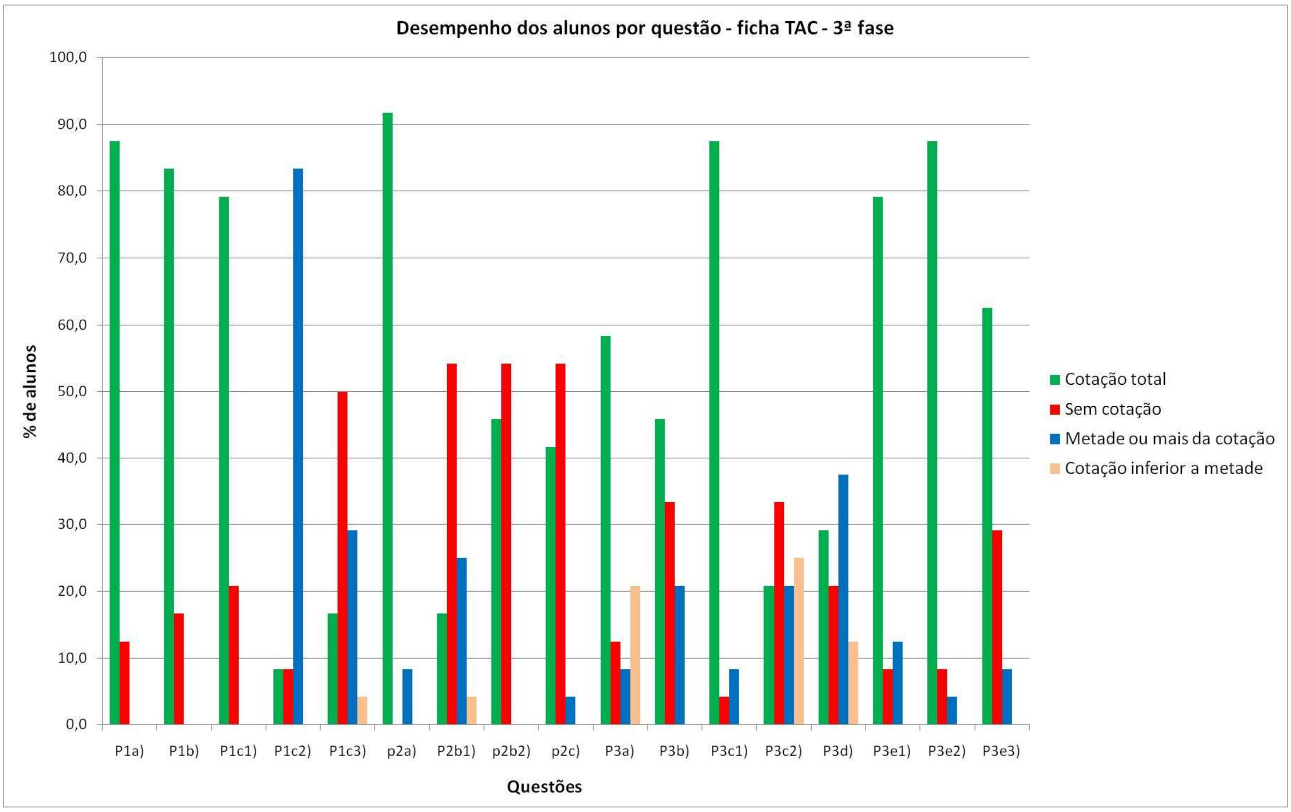


Gráfico n.º 6 – Desempenho dos alunos nas questões da ficha TAC – 3ª fase

Esta ficha de trabalho foi estruturada com três problemas que abrangiam interpretação e desenho geométrico, cálculo associado a áreas e volumes de figuras e também num dos problemas pedia-se uma demonstração onde os alunos eram solicitados mais uma vez a trabalhar com letras associadas a números.

A primeira questão onde o desempenho dos alunos se revelou muito fraco foi na questão P1c3), onde se pedia aos alunos que determinassem o volume do octaedro de aresta igual a metade da aresta ***b*** do tetraedro, sendo dado o volume do tetraedro. Esta questão envolvia um determinado conjunto de cálculos e os alunos tinham caminhos diferentes para chegar à solução. Bastantes deles revelaram logo dificuldades na determinação da altura do tetraedro, para conseguir através da expressão do volume explicitar o valor da aresta ***b***, outros têm erros de cálculo intermédio na aplicação sucessiva do Teorema de Pitágoras e muitos nem sequer começaram a resolver a questão, houve ainda situações que consideraram o tetraedro e o octaedro como figuras semelhantes e então aplicaram o conceito de que a razão entre os volumes dos dois sólidos é igual ao cubo da razão de semelhança, e desta forma chegaram a um suposto valor, não correcto, para o volume do tetraedro. Apenas quatro alunos conseguiram de forma correcta e sem erros intermédios chegar à solução da questão e dentro destes houve caminhos diferentes, pois dois alunos pensaram logo em retirar o volume de quatro tetraedros de aresta ***b/2*** ao volume do tetraedro inicial.

A questão P2a) que pedia uma pequena demonstração relativamente ao volume de dois prismas triangulares, associada a expressões com letras, foi maioritariamente superada pelos alunos e este facto já revelou alguma progressão na aquisição de competências dos alunos ao lidar com expressões algébricas.

Por outro lado, na questão P2b1) os resultados foram novamente muito fracos, onde se pedia aos alunos para determinarem a área total do prisma hexagonal ilustrado na figura seguinte.

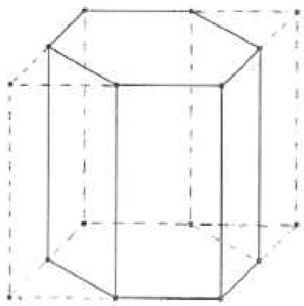


Figura n.º 25 – figura geométrica do problema 2 da ficha TAC – 3ª fase

Era dito aos alunos que os vértices do prisma hexagonal obtido depois dos cortes, ou coincidem com os vértices do cubo ou com os pontos médios das arestas onde estão contidos.

Na realidade, uma grande parte dos alunos não leu a questão convenientemente, pois calculou a área do hexágono como se este fosse regular e consequentemente na área lateral do prisma considerou todos os rectângulos geometricamente iguais. Poucos foram os alunos que lhes ocorreu no cálculo da área do hexágono poder calculá-la a partir da área da face do cubo e retirar-lhe a área correspondente a dois triângulos isósceles. Ou ainda de outra forma, houve alunos que decompuseram o hexágono em dois trapézios isósceles, equacionando de forma correcta a área do prisma hexagonal, contudo cometem alguns erros nos cálculos intermédios.

Ilustram-se nas figuras seguintes alguns exemplos das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos na questão P2b).

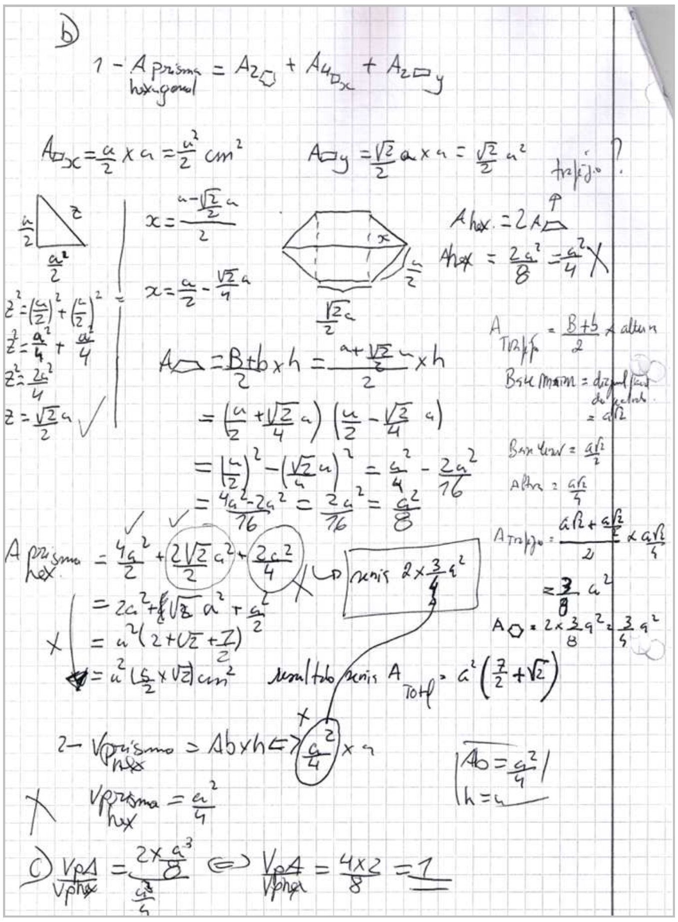


Figura n.º 26 – proposta de resolução do aluno n.º 20 à questão P2b) – 3ª fase

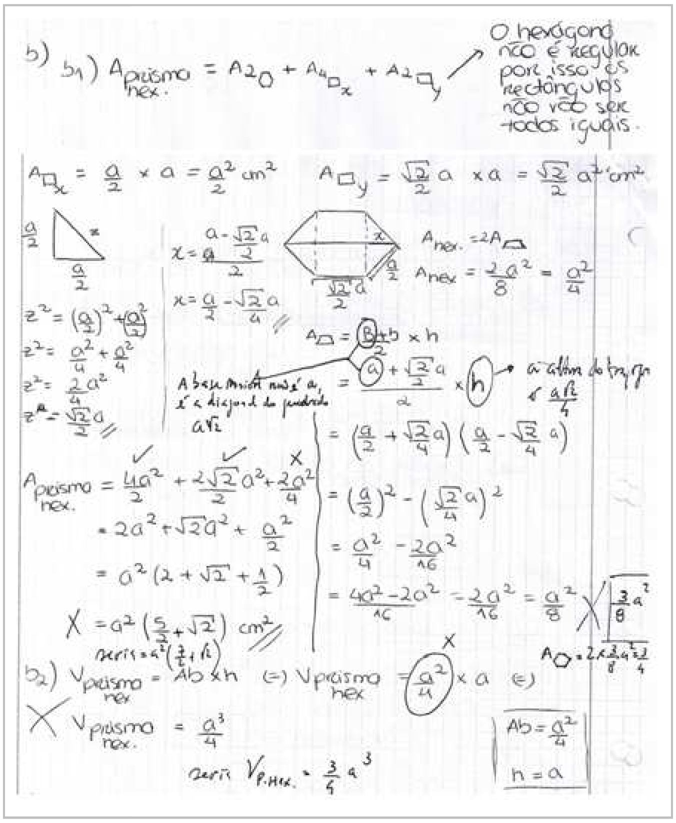


Figura n.º 27 – proposta de resolução do aluno n.º 21 à questão P2b) – 3ª fase

Relativamente à questão P3c2), pedia-se novamente aos alunos para representar a planificação de uma pirâmide, ilustrada na figura seguinte.

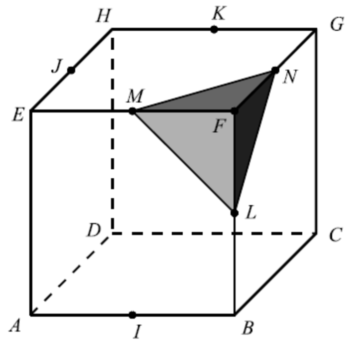


Figura n.º 28 – figura geométrica do problema 3 da ficha TAC – 3ª fase

Aconteceu que erros de interpretação geométrica cometidos logo na primeira ficha de diagnóstico, voltaram a ocorrer novamente, nomeadamente na representação da face [MNL] em que o triângulo é equilátero e nas restantes faces não respeitam os triângulos isósceles rectângulos, assim como alguns alunos voltaram a desenhar uma planificação aproximada de um tetraedro.

Nas figuras seguintes estão ilustradas algumas das representações dos alunos.

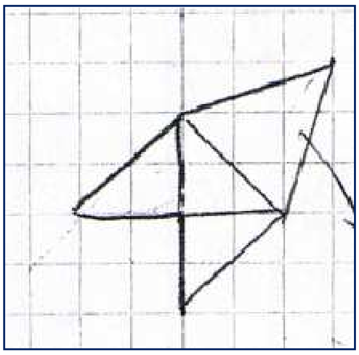


Figura n.º 29 – proposta de resolução do aluno n.º 1 à questão P3c2)

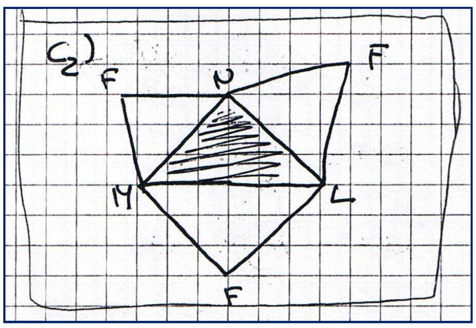


Figura n.º 30 – proposta de resolução do aluno n.º 3 à questão P3c2)

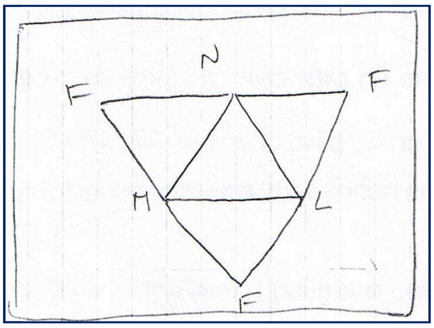


Figura n.º 31 – proposta de resolução do aluno n.º 21 à questão P3c2)

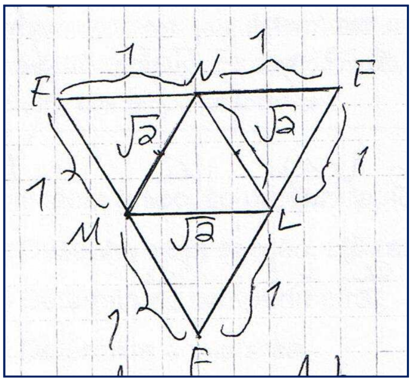


Figura n.º 32 – proposta de resolução do aluno n.º 16 à questão P3c2)

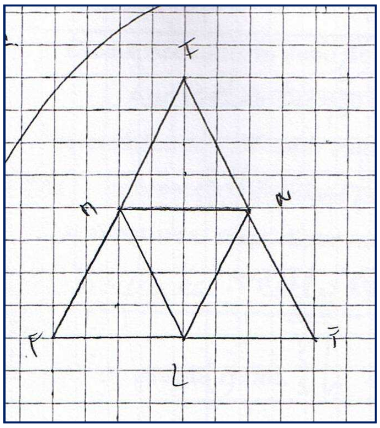


Figura n.º 33 – proposta de resolução do aluno n.º 14 à questão P3c2)

6.4 - Dados da quarta fase

Já perto do final do ano lectivo, mais precisamente no final de Maio, voltou a ser aplicada uma ficha de trabalho, desta vez realizada em sala de aula, sem aviso prévio dos alunos, já que o objectivo seria constatar se as aprendizagens desenvolvidas até então, relativas aos conteúdos abordados neste projecto de investigação, se mantinham, se tinham tido progressos, ou, se pelo contrário, poderia haver uma regressão nos resultados de avaliação obtidos até ao momento.

Além da análise dos resultados da turma, foi feito um acompanhamento mais específico, através de observação directa, com alguns alunos em particular.

Novamente, esta actividade foi estruturada com três problemas que abrangiam interpretação de figuras, a determinação de secções produzidas por um plano de corte, o desenho de planificações, em verdadeira grandeza, de sólidos obtidos pela decomposição do sólido de partida e o cálculo associado a áreas e volumes dos sólidos resultantes, incluindo também letras nas dimensões das arestas.

O gráfico seguinte ilustra os resultados obtidos, em termos de avaliação quantitativa, pelos alunos nesta quarta fase da investigação, assim como inclui também os resultados das fases anteriores.

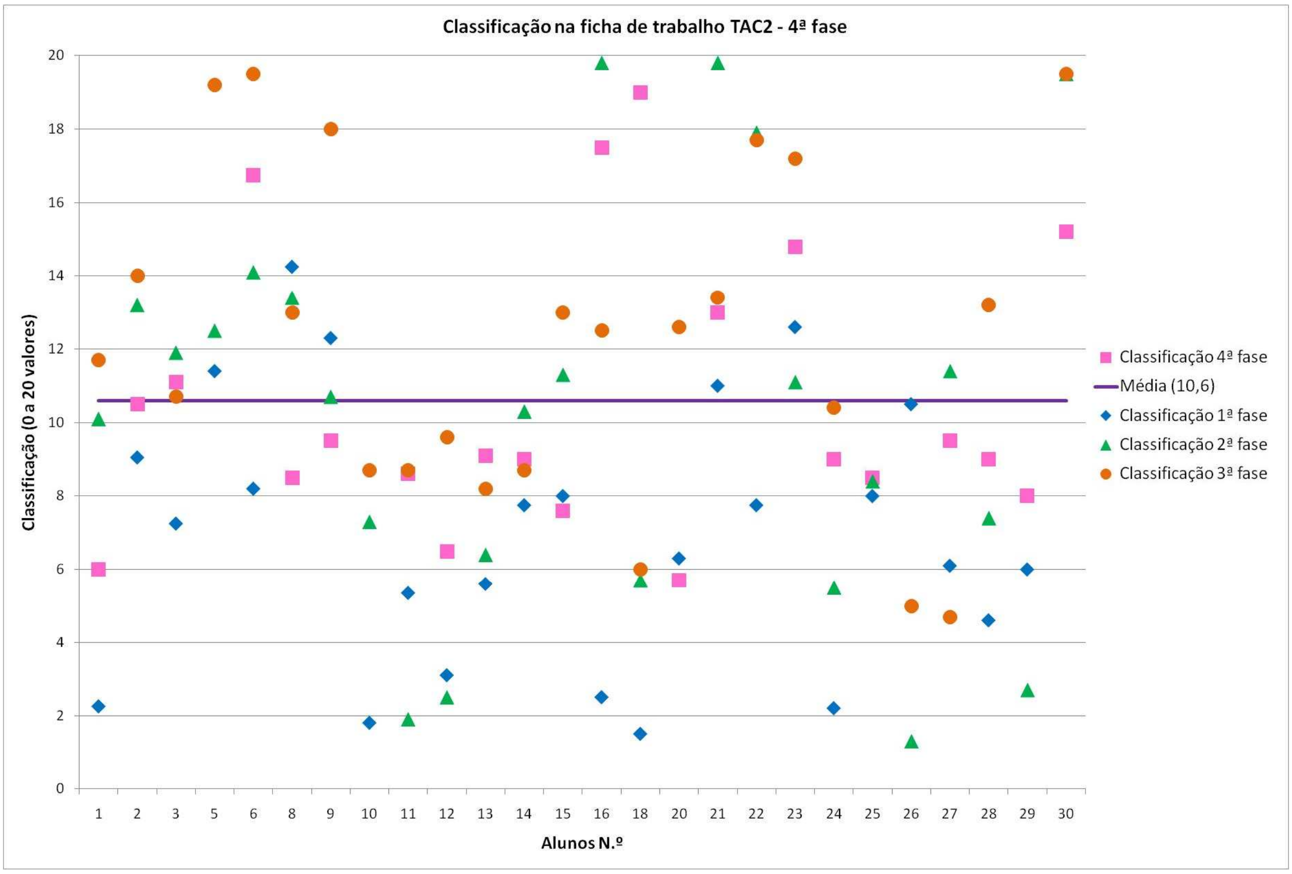


Gráfico n.º 7 – Classificação da ficha TAC2 – 4ª fase

Nesta última fase do estudo, a classificação média obtida foi de aproximadamente 10,6 valores. De um total de 22 alunos que realizaram esta actividade, apenas oito obtiveram resultados positivos, mas neste grupo restrito, cinco estão no patamar do Bom e Muito Bom. Mesmo assim, das negativas, dez alunos ficaram acima de 8,5 valores. Claro que os resultados obtidos são pouco satisfatórios, os alunos voltaram a demonstrar dificuldades na interpretação geométrica e transposição do raciocínio visual-espacial para o desenho no plano, assim como no cálculo algébrico.

Para se compreender melhor o desempenho dos alunos nesta actividade, vamos analisar com maior detalhe algumas das questões onde na realidade se verificaram mais erros de resolução.

O gráfico seguinte ilustra o desempenho dos alunos na resolução das questões desta quarta actividade.

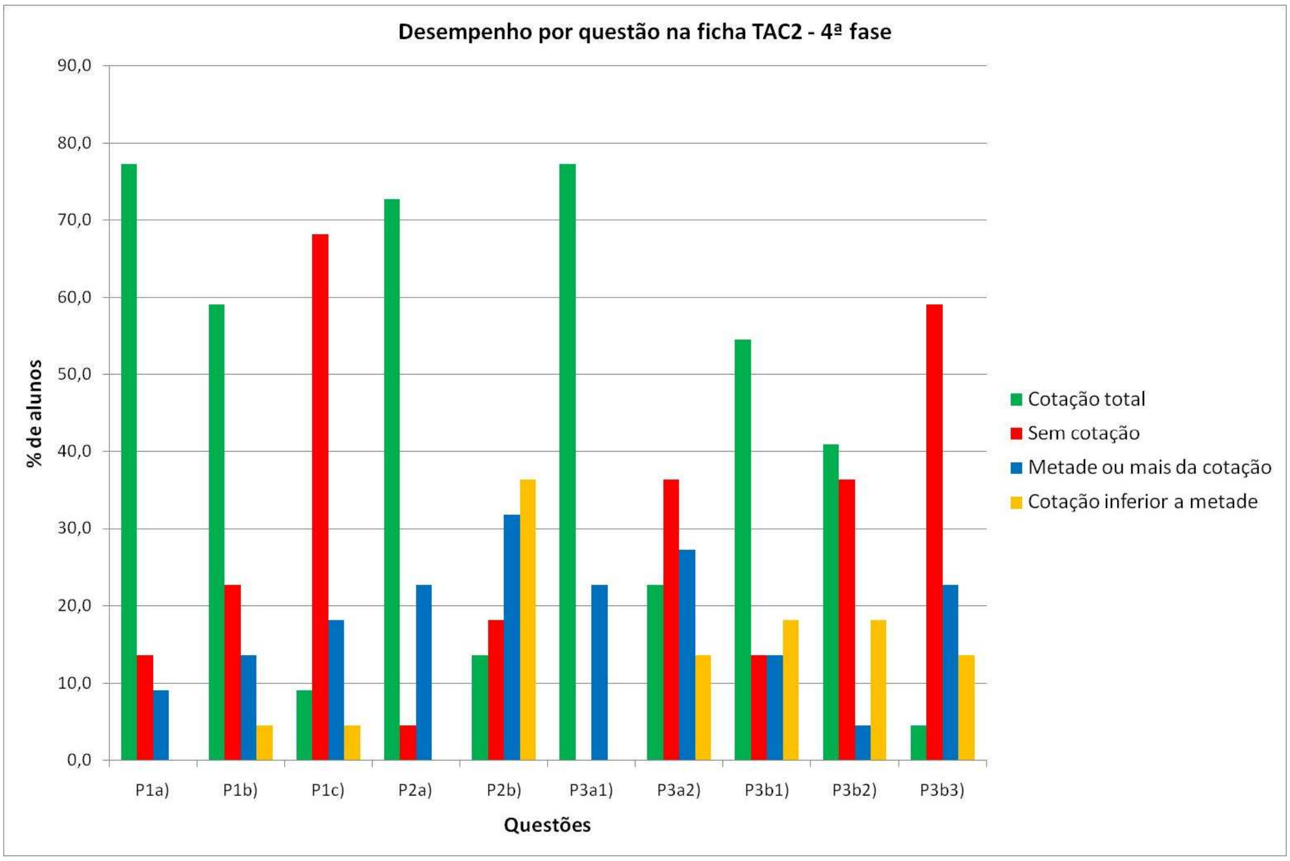


Gráfico n.º 8 – Desempenho dos alunos nas questões da ficha TAC2 – 4ª fase

Pela análise do gráfico, pode observar-se que os alunos revelaram pior desempenho nas questões P1c), P2b), P3a2), P3b2) e P3b3), com especial destaque para as perguntas P1c) e P3b3) onde mais de 50 % dos alunos não tiveram qualquer cotação.

No que diz respeito à questão P1c), foi solicitado aos alunos para desenhar e identificar a secção produzida num cubo pelo plano IJK, como se ilustra na figura seguinte.

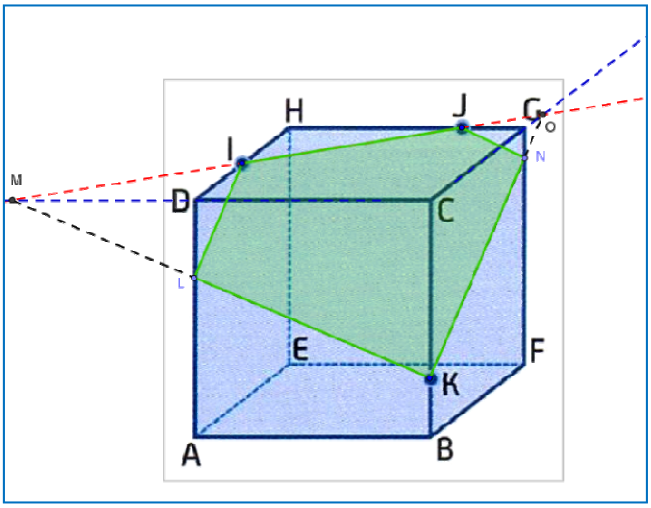


Figura n.º 34 – figura geométrica do problema 1 da ficha TAC2 – 4ª fase

Na realidade uma boa parte dos alunos demonstrou saber que pode unir pontos do plano de corte pertencentes à mesma face, contudo no que diz respeito a situações em que o aluno não visualiza directamente pontos na mesma face, e onde tem que ter em conta que um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas, o desempenho já se tornou mais diminuto. A maioria dos alunos não efectuou, ou fê-lo de forma incorrecta, o prolongamento da aresta [DC] ou da aresta [CG] de forma a encontrar os pontos M e O respectivamente, e assim obter a recta MK pertencente ao plano ABC, determinando de imediato o ponto L, ou então obter a recta KO pertencente ao plano BCG, determinando o ponto N.

Nas figuras seguintes ilustram-se algumas propostas de resolução, não correctas, dos alunos nesta questão.

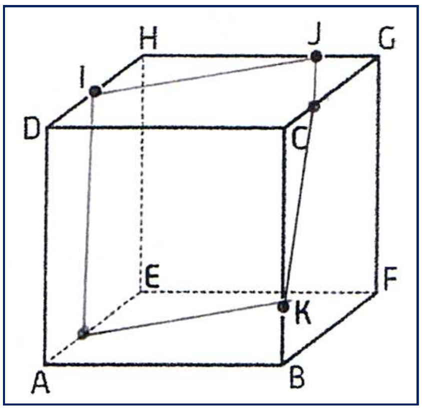


Figura n.º 35 – proposta de resolução do aluno n.º 11 à questão P1c)

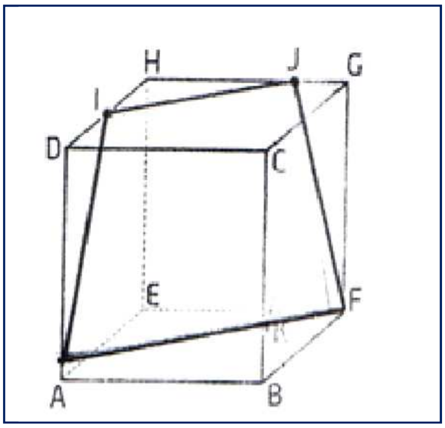


Figura n.º 36 – proposta de resolução do aluno n.º 25 à questão P1c)

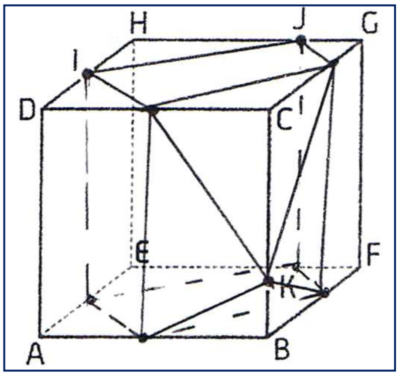


Figura n.º 37 – proposta de resolução do aluno n.º 27 à questão P1c)

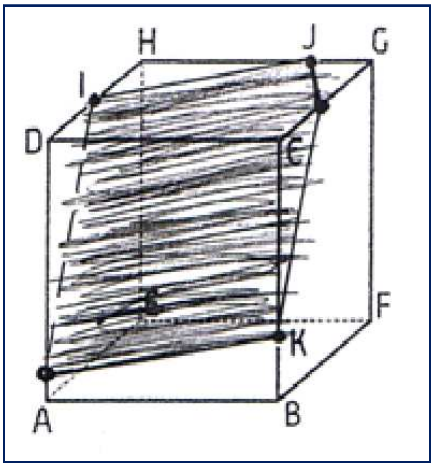


Figura n.º 38 – proposta de resolução do aluno n.º 29 à questão P1c)

A questão P2b) envolvia novamente um plano de corte num cubo, o qual determinava uma secção triangular que decompunha o cubo em dois novos sólidos, sendo um deles uma pirâmide triangular idêntica à que se tinha vindo a trabalhar desde o início do projecto de investigação, como se ilustra na figura seguinte.

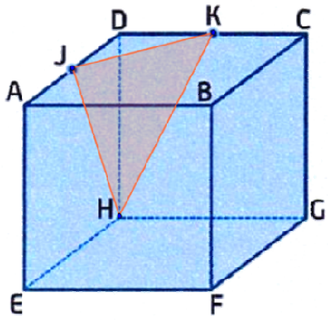


Figura n.º 39 – figura geométrica do problema 2 da ficha TAC2 – 4ª fase

Foi solicitado aos alunos que desenhassem, em verdadeira grandeza, uma planificação da pirâmide em causa. Os resultados obtidos foram substancialmente melhores que nas fases anteriores, pois cerca de metade dos alunos representaram correctamente a planificação em causa, contudo continuaram a surgir propostas de resolução que evidenciaram novamente falta de visualização espacial e capacidade de transportar essa visualização para o plano. Nas figuras seguintes ilustram-se alguns exemplos de propostas de resolução, não correctas, dos alunos.

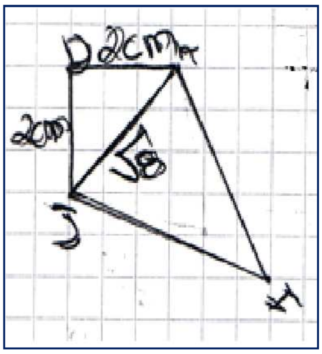


Figura n.º 40 – proposta de resolução do aluno n.º 1 à questão P2b)

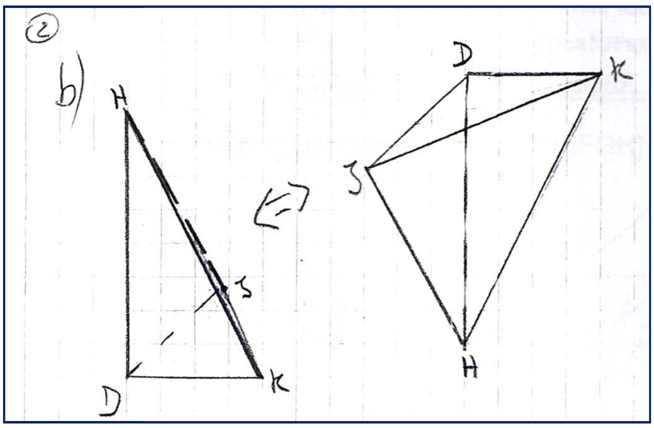


Figura n.º 41 – proposta de resolução do aluno n.º 2 à questão P2b)

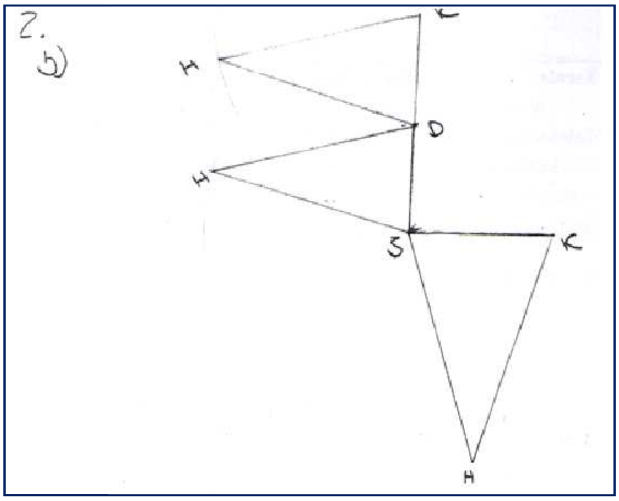


Figura n.º 42 – proposta de resolução do aluno n.º 3 à questão P2b)

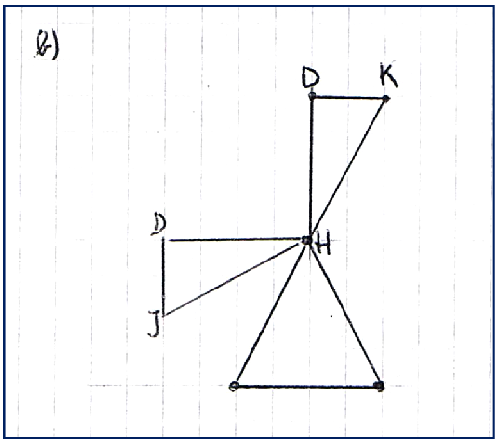


Figura n.º 43 – proposta de resolução do aluno n.º 11 à questão P2b)

Relativamente ao problema três, no qual os resultados obtidos nas alíneas P3a2) e P3b2) foram muito pouco satisfatórios e na alínea P3b3) foram mesmo não satisfatórios, envolvia um plano de corte num cubo do qual resultava uma secção rectangular, como se ilustra na figura seguinte.

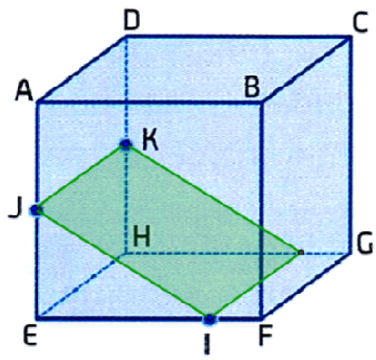


Figura n.º 44 – figura geométrica do problema 3 da ficha TAC2 – 4ª fase

Os pontos J e K são pontos médios das respectivas arestas e mais uma vez a dimensão da aresta do cubo era dada pela letra ***a*** e o segmento $\overline{EI}$ mede $\frac{3}{4}$ ***a***.

Na alínea P3a2) foi solicitado aos alunos que determinassem em função de ***a*** o perímetro e a área da secção, e mais uma vez o cálculo algébrico ficou aquém das expectativas, pois muitos alunos ignoraram simplesmente a letra ***a***, outros continuaram a cometer erros nas operações com radicais, na aplicação do Teorema de Pitágoras e erros nas regras de resolução de equações. Observou-se igualmente que existe uma tendência dos alunos para trabalhar com os números na forma de dízima e não na forma de fracção e também quando a expressão numérica envolve um número a multiplicar por uma letra, quando os alunos elevam ao quadrado a expressão, não colocam parênteses e afectam somente o quadrado apenas à letra e não ao produto.

No que diz respeito à alínea P3b2), onde foi solicitado aos alunos que representassem uma planificação do prisma triangular, sólido resultante da decomposição do cubo pelo plano de corte em causa, os resultados voltaram a ser pouco satisfatórios. Alguns alunos, na sua planificação, não representam todas as faces do prisma, não respeitam as dimensões das arestas e consequentemente não existe concordância entre as faces e ainda alguns identificam o sólido como uma pirâmide. Ilustram-se de seguida alguns exemplos onde erros estão bem patentes.

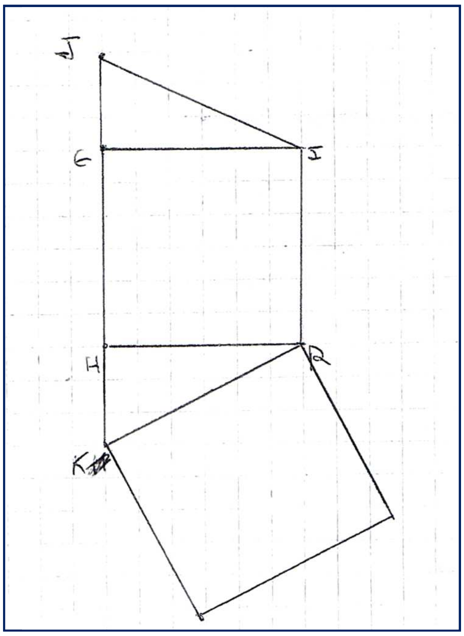


Figura n.º 45 – proposta de resolução do aluno n.º 8 à questão P3b2)

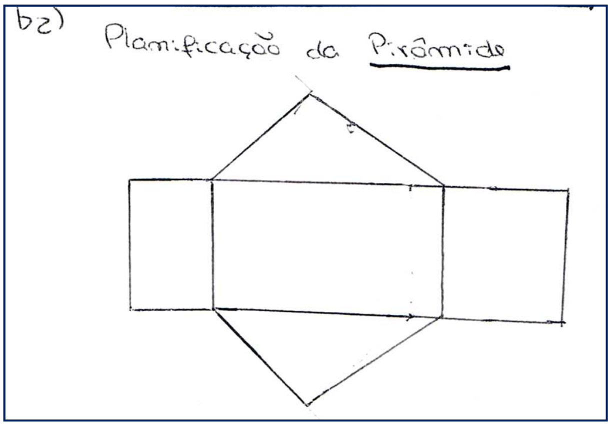


Figura n.º 46 – proposta de resolução do aluno n.º 9 à questão P3b2)

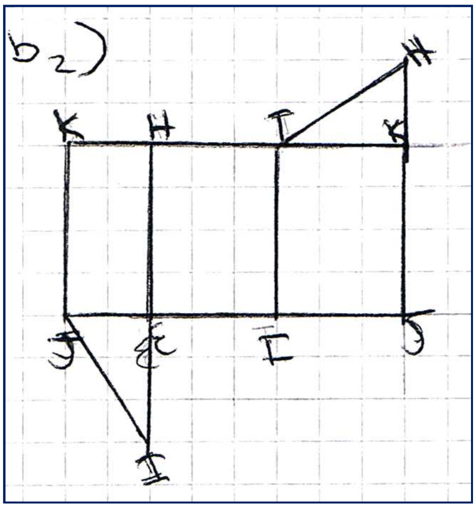


Figura n.º 47 – proposta de resolução do aluno n.º 30 à questão P3b2)

Na alínea P3b3) pedia-se aos alunos que determinassem, em função de ***a***, a área e o volume do prisma triangular em causa. No cálculo da área uma grande parte dos alunos até efectuaram a decomposição correcta do sólido em termos do número e forma das faces, contudo, quando efectuam o cálculo, demonstram novamente erros nas operações com radicais, na aplicação do Teorema de Pitágoras e erros nas regras de resolução de equações.

No cálculo do volume, muitos já não o fizeram e mesmo alguns alunos que tentaram a sua resolução partiram do princípio que o sólido era uma pirâmide e aplicaram a expressão do volume da pirâmide $\boxed{Vpirâmide = \frac{1}{3} \times Ab \times altura}$, enquanto que outros alunos partiram do princípio que o sólido era um prisma, mas não consideraram como base as faces triangulares.

7 - Análise Global dos Resultados Obtidos

Tendo em conta que o estudo tem por base:

- perceber a dificuldade que os alunos demonstram nos problemas de visualização espacial e construção geométrica, relacionados com truncaturas em poliedros regulares e consequentemente a obtenção de novos sólidos;
- analisar as dificuldades evidenciadas na realização da planificação de um dos sólidos resultantes do corte;
- analisar as dificuldades demonstradas no cálculo de áreas e de volumes quer dos sólidos de partida quer dos novos sólidos obtidos.

De modo a quantificar de alguma forma os resultados obtidos nas diferentes etapas do processo, em função dos objectivos em análise, seleccionei duas questões tipo, transversais às quatro fases do projecto, relacionadas com o desenho da planificação de um dos sólidos resultantes e com o cálculo algébrico de áreas e volumes. Posteriormente analisei a evolução do desempenho dos alunos nestes dois tipos de questões ao longo do estudo.

A tabela seguinte indica quais as questões transversais seleccionadas para o efeito, nas diferentes fases do estudo.

Fases do projecto	Questões Transversais	
	Desenho da planificação	Cálculo de áreas e volumes
1ª fase	P1c3)	P1c2)
2ª fase	Planificação do novo sólido	Capacidade de demonstração
3ª fase	P3c2)	P2b2)
4ª fase	P2b)	P3b3)

De modo a efectuar a análise do desempenho dos alunos, nestes dois tipos de questões, ao longo do estudo, foi considerado para o efeito duas classes distintas de alunos, ou seja, os que atingiram metade ou mais da cotação e os que atingiram menos de metade da cotação nas questões propostas.

O gráfico seguinte pretende de alguma forma ilustrar a evolução do desempenho dos alunos, ao longo do processo, relacionado com a capacidade de realizar uma planificação de um dos sólidos obtidos.

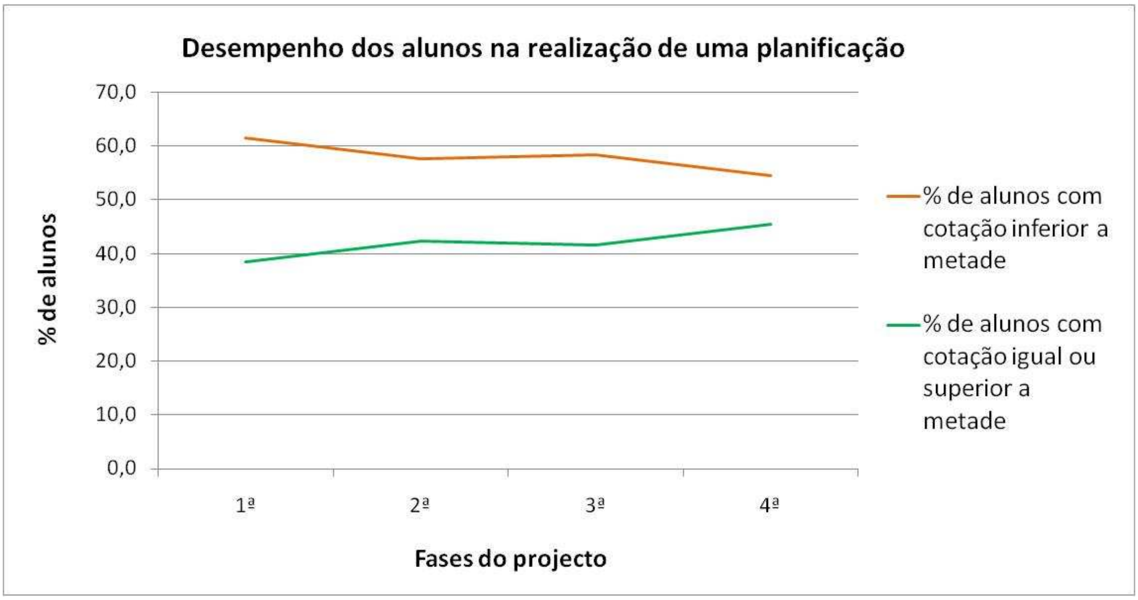


Gráfico n.º 9 – Evolução do desempenho dos alunos na realização de uma planificação

Pela análise do gráfico, e através do que tinha sido já analisado na recolha de dados, verifica-se que aproximadamente metade dos alunos que realizaram as diferentes fases do estudo atingiu o final do processo revelando bastantes dificuldades em efectuar eficazmente a planificação do sólido.

Relativamente ao desempenho no cálculo algébrico, verificou-se ao longo do processo a evidência de erros cometidos nas operações com radicais, com potências e na própria resolução de equações.

Pretendia-se que o gráfico seguinte transmitisse de alguma forma a evolução do desempenho dos alunos no tipo de questão relacionada com o cálculo de áreas e volumes, contudo na quarta fase do estudo, a questão seleccionada para o efeito foi a P3b3) na qual a maioria dos alunos já não realizou. No entanto, é possível admitir que cerca de metade dos alunos conseguiram atingir os objectivos propostos relativamente às questões de cálculo.

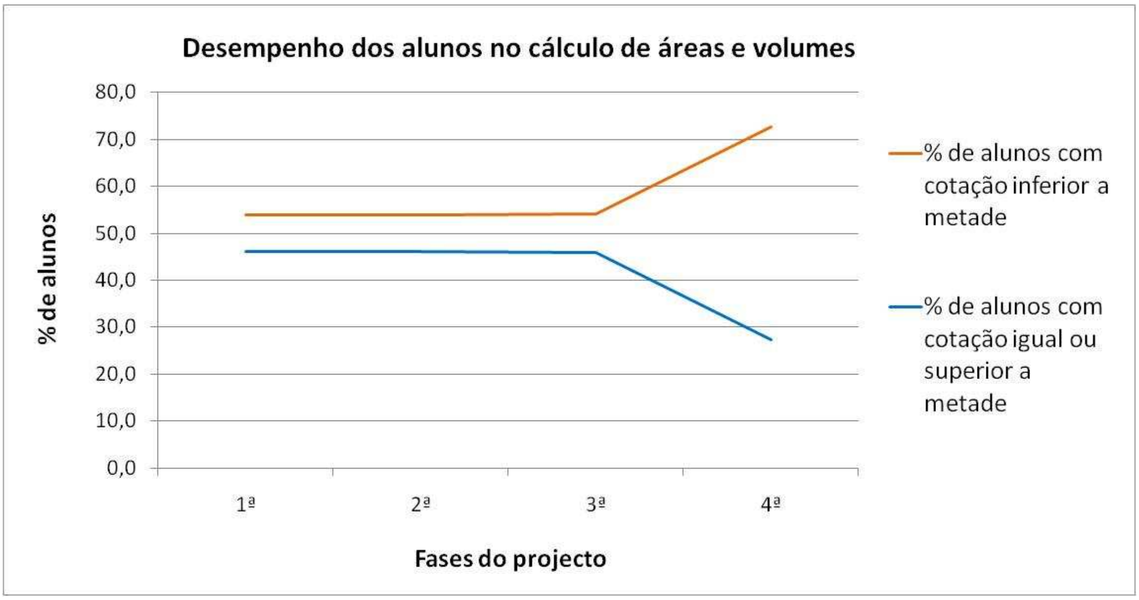


Gráfico n.º 10 – Evolução do desempenho dos alunos no cálculo de áreas e volumes

De forma geral, verificou-se que, ao longo de todo este processo de investigação, uma boa parte dos alunos evidenciou falta de capacidade na visualização espacial e uma certa dificuldade em transpor essa visualização para o plano. Associada a esta lacuna de capacidade de interpretação geométrica, os alunos demonstraram grandes dificuldades em trabalhar com as expressões algébricas associadas aos problemas propostos, quer no cálculo de áreas como de volumes, assim como na necessidade e alcance da demonstração em Matemática.

Em termos de avaliação quantitativa, ao longo das diferentes fases do processo, verificou-se que houve uma progressão nos resultados obtidos pelos alunos, existindo um desenvolvimento nas suas aprendizagens e competências adquiridas, apesar de na última actividade os resultados positivos terem diminuído, ainda que a média se manteve positiva.

O Gráfico seguinte pretende ilustrar, de alguma forma, a evolução da avaliação quantitativa verificada ao longo da aplicação das diferentes actividades do projecto de investigação.

Gráfico n.º 11 – Evolução média da avaliação quantitativa ao longo do estudo

Claro que, fazer uma análise global através de valores médios, dos resultados obtidos em cada fase, é susceptível de uma certa margem de erro, contudo as experiências realizadas pelos alunos, independentemente de estes conseguirem ou não atingir os objectivos propostos, tornaram-se benéficas no seu processo de ensino e aprendizagem.

Utilizando ainda uma outra abordagem semelhante, agora através do número de classificações positivas e negativas nas diferentes fases do projecto, obtém-se a evolução demonstrada no gráfico seguinte.

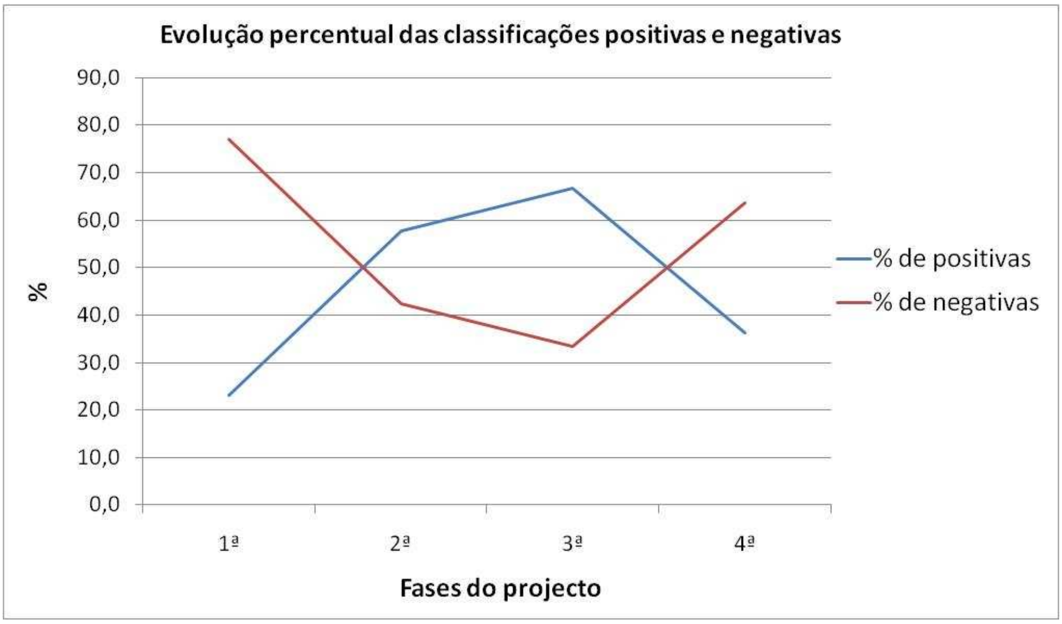


Gráfico n.º 12 – Evolução percentual das classificações positivas e negativas ao longo do estudo

8 - Estudo de Casos Particulares

Com base num conjunto de factores, tais como a evolução na avaliação formativa e sumativa na disciplina de Matemática, atitudes e valores demonstrados em sala de aula e empenho nas tarefas propostas, foram escolhidos os alunos n.º 15, n.º 16 e n.º 18 para um estudo mais pormenorizado sobre a evolução das suas aprendizagens e aquisição de competências ao longo deste processo investigativo.

Relativamente a estes alunos, a evolução da sua avaliação sumativa, ao longo do ano lectivo, está representada no gráfico seguinte.

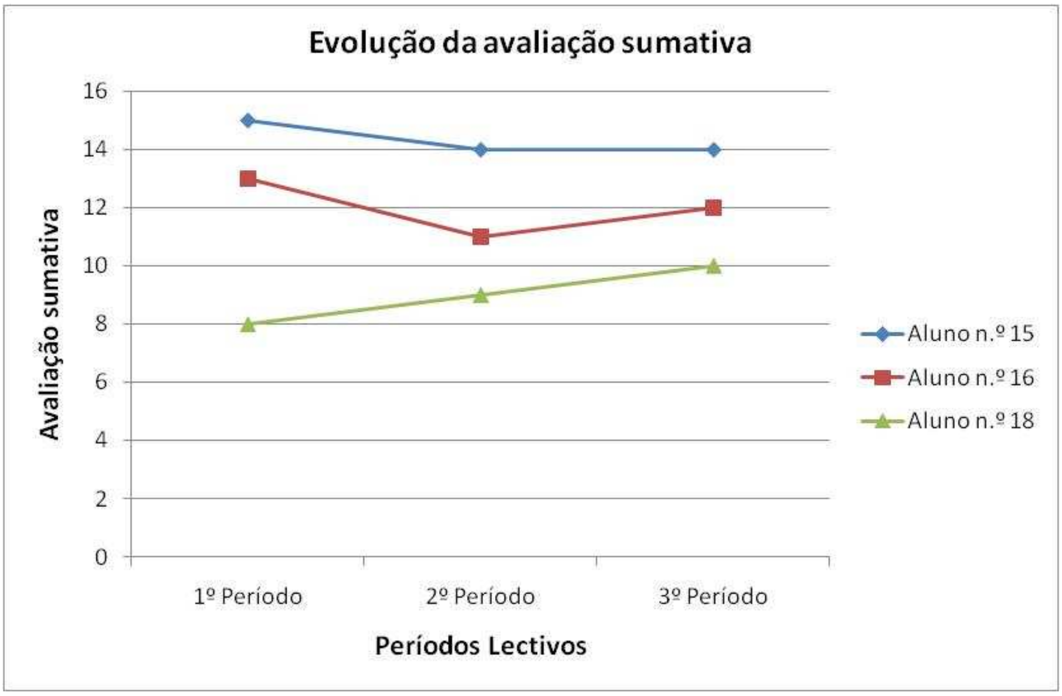


Gráfico n.º 13 – Evolução da avaliação sumativa dos alunos considerados para o estudo de casos particulares

O aluno n.º 15 demonstrou logo no inicio do ano lectivo ser um aluno com capacidades para a Matemática, contudo, com a continuação do ano, veio a revelar falta de dedicação e empenho no estudo e os seus resultados a diminuírem, que no entanto poderiam ser bastante melhores. Os outros dois alunos revelaram continuamente dificuldades na aprendizagem e aquisição de competências, nomeadamente o aluno n.º 18, contudo demonstraram sempre uma atitude positiva e empenho considerável perante a disciplina, no sentido de ultrapassarem as suas dificuldades.

Relativamente à evolução dos resultados quantitativos obtidos por estes alunos, nas diferentes fases do projecto, pode-se constatar, pelo gráfico seguinte, que ambos iniciaram o estudo com avaliações negativas, dos quais os alunos n.º 16 e n.º 18 bastante fracas. Na segunda fase houve uma melhoria significativa, contudo o aluno n.º 18 ainda se mantinha num nível bastante baixo, pois revelou sempre enormes dificuldades de aprendizagem.

Na terceira fase o aluno n.º 16 diminui bastante o seu desempenho, tendo os alunos n.º 15 e n.º 18 continuado a melhorar os seus resultados, no entanto o aluno n.º 18 continuava a demonstrar uma enorme dificuldade em superar com sucesso a realização das tarefas propostas.

Por fim, na quarta fase, e com alguma "surpresa" o aluno n.º 15 teve uma prestação bastante reduzida, possivelmente fruto da sua falta de empenho no final do ano lectivo, e o aluno n.º 16 voltou a melhorar os seus resultados. A revelação bastante surpreendente foi o desempenho do aluno n.º 18 que na última ficha de trabalho demonstrou todo o seu esforço e dedicação ao estudo, por forma a superar as dificuldades que revelou durante o ano lectivo.

O seguinte gráfico ilustra a evolução na avaliação quantitativa dos três alunos ao longo das diferentes fases do processo.

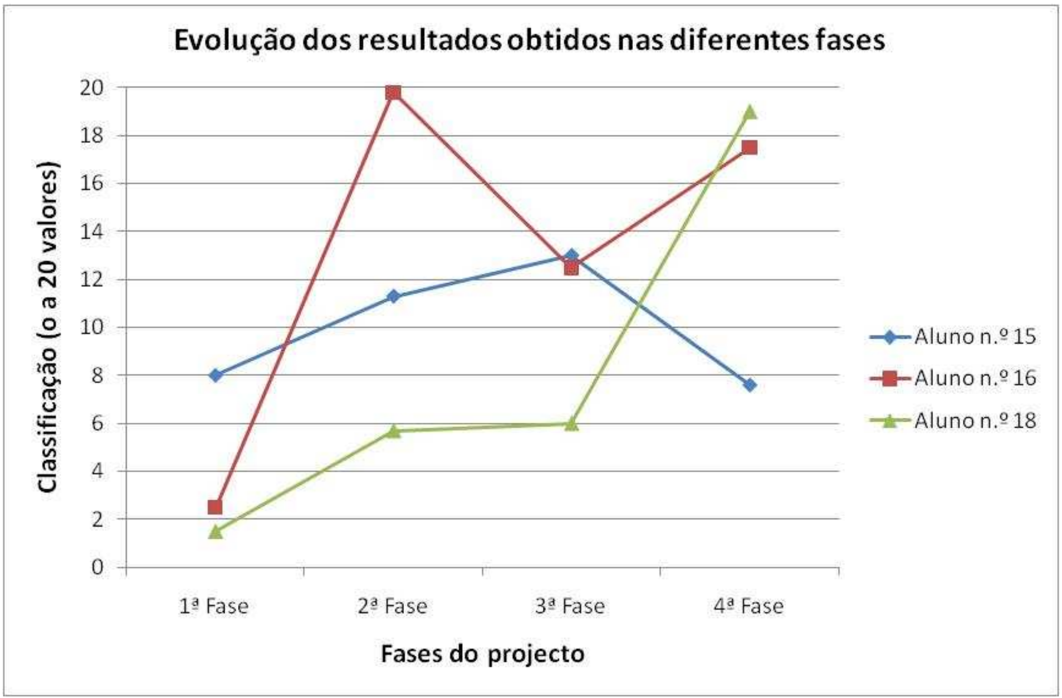


Gráfico n.º 14 – Evolução da classificação dos alunos considerados para o estudo de casos particulares, nas diferentes fases do projecto

8.1 - Caso do aluno n.º 15

Este aluno demonstrou continuamente uma atitude e comportamento considerados adequados em sala de aula, no entanto, por vezes a sua falta de empenho e dedicação ao estudo revelaram-se nos seus resultados menos bons, obtidos ao longo do ano lectivo. Não tinha o caderno diário organizado e em dia, fazendo muitas vezes a resolução dos exercícios no próprio manual adoptado. Começou por ter uma avaliação de quinze valores no primeiro período, contudo acabou por terminar o 10º ano com a classificação de catorze valores.

Relativamente ao projecto, obteve na primeira fase do estudo uma classificação de 8,0 valores e o seu desempenho nas diferentes questões da actividade está ilustrado no gráfico seguinte.

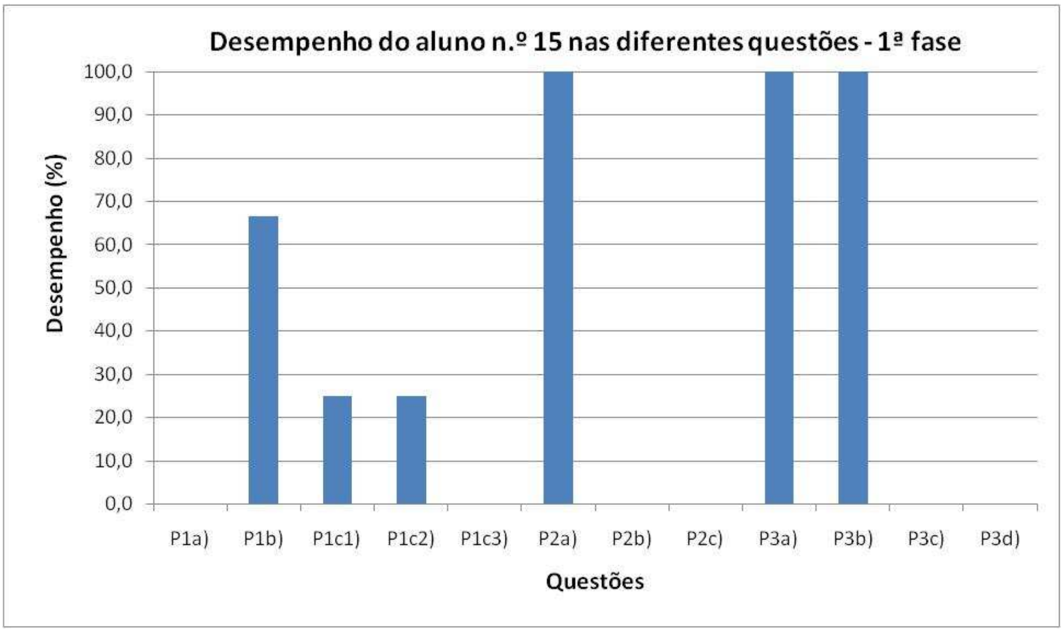


Gráfico n.º 15 – Desempenho do aluno n.º 15 nas diferentes questões da ficha de diagnóstico – 1ª fase

Através da análise do gráfico pode observar-se que o seu desempenho foi diminuto nas questões P1a), P1c1), P1c2), p2b), P2c), P3c) e P3d).

Relativamente à questão P1a) onde se pedia para identificar um dos sólidos resultantes de um plano de corte num cubo, o aluno identificou como sendo um tetraedro regular e na realidade era uma pirâmide triangular.

Na questão P1c1) onde era requerido o cálculo do volume da pirâmide em causa, o aluno aplica a fórmula correcta, escolhe para base da pirâmide a face [IEK], contudo nos cálculos intermédios comete um erro ao determinar a área da base da pirâmide. A questão P1c2) pedia o volume do cubo truncado e o aluno aplicou correctamente o raciocínio, contudo vinha com valores errados de trás.

No que diz respeito à questão P1c3), onde era pedido aos alunos para desenharem uma planificação da pirâmide [IJKE], o aluno em causa fez a seguinte representação, não correcta, como se ilustra na figura abaixo.

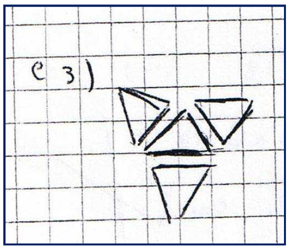


Figura n.º 48 – proposta de resolução do aluno n.º 15 à questão P1c3)

Relativamente às questões P2b), P2c) P3c) e P3d) o aluno não respondeu.

No que diz respeito à segunda fase do projecto, o aluno obteve uma classificação de 11,3 valores, e o seu desempenho na resolução das questões propostas na actividade está ilustrado no gráfico seguinte.

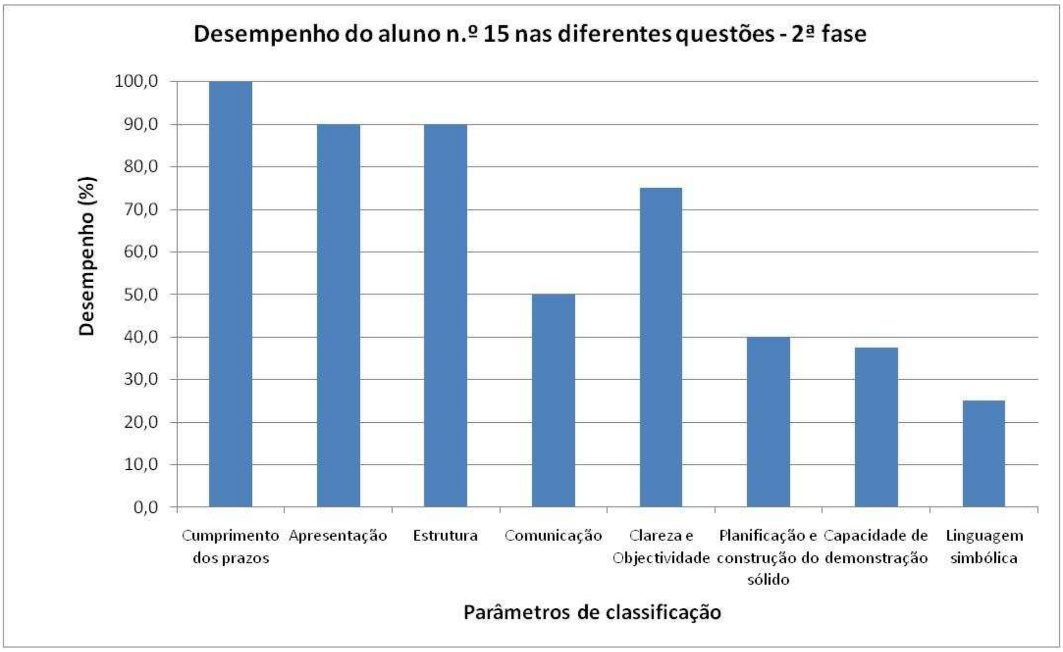


Gráfico n.º 16 – Desempenho do aluno n.º 15 nas diferentes questões da actividade "vdnp" – 2ª fase

Coube ao aluno a actividade 5 da segunda fase denominada "vamos descobrir novos poliedros", onde o seu sólido de partida era um tetraedro regular e tinha que substituir cada aresta por um vértice situado no seu ponto médio, consequentemente obteria um octaedro regular. Na planificação e construção do sólido resultante o aluno teria que escolher um valor para a dimensão da aresta do sólido de partida e posteriormente determinar a dimensão da aresta do sólido resultante, o que não aconteceu, pois o aluno optou pelo inverso.

Relativamente à capacidade de demonstração e linguagem simbólica, onde era solicitado ao aluno para determinar, em função da dimensão ***b*** da aresta do tetraedro, a relação que existe entre a área da superfície do tetraedro e a do sólido obtido, assim como a relação entre os volumes do tetraedro e do sólido obtido, este praticamente não efectuou cálculos, limitando-se a pesquisar e a enunciar as fórmulas pretendidas. No seu trabalho registou as seguintes afirmações.

"Eu acho que as áreas deviam ser iguais, devido a que a aresta do octaedro ter metade do tamanho, mas o dobro das faces, logo devia dar um resultado igual".

Aluno n.º 15, Actividade 5

"Fiquei confuso no ex. 3, usei umas expressões para calcular o volume (que retirei da Wikipédia) e não sei se estão correctas. De qualquer forma fiquei com a impressão de que os volumes e as áreas ião ser iguais".

Aluno n.º 15, Actividade 5

No que concerne à terceira fase do projecto, o aluno obteve uma classificação de 13 valores, e o seu desempenho na resolução das questões propostas na actividade está ilustrado no gráfico seguinte.

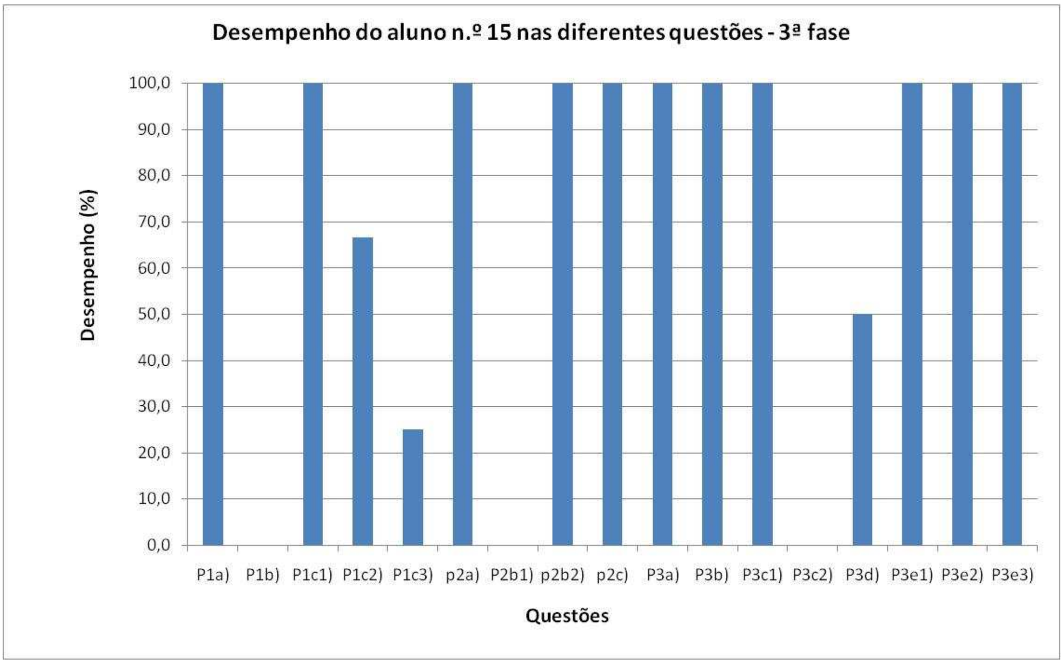


Gráfico n.º 17 – Desempenho do aluno n.º 15 nas diferentes questões da actividade TAC – 3ª fase

Através da análise do gráfico pode observar-se que o aluno revelou um baixo desempenho nas questões P1b), P1c3), P2b1) e P3c2).

Na questão P1b) pedia-se que o aluno desenhasse a secção e identificasse o polígono obtido pela intersecção de um plano de corte num tetraedro regular, e este referiu que o polígono obtido era um "octaedro". O aluno revelou grande confusão entre figuras planas e sólidos resultantes.

Na questão P1c3) era dado o volume do sólido de partida, tetraedro, e pedia-se para determinar o volume do octaedro de aresta igual a metade da aresta do tetraedro. O aluno seguiu pelo caminho da razão de semelhança entre o tetraedro inicial e os quatro tetraedros que resultam da truncatura, em cada vértice do tetraedro inicial, determinando o volume de cada um destes e retirando o valor do volume dos quatro tetraedros semelhantes ao volume do tetraedro inicial, e chegou ao valor correcto, contudo nos cálculos intermédios salta passos da resolução e demonstra não ter a certeza daquilo que está a fazer.

Relativamente à questão P2b1) onde se pedia para determinar a área total do prisma hexagonal, cuja base hexagonal não é regular, o aluno efectuou o cálculo utilizando a expressão do cálculo de áreas de polígonos regulares.

Na questão P3c2) era pedido ao aluno para desenhar uma planificação de uma pirâmide triangular semelhante à da actividade realizada na primeira fase do projecto e o aluno volta a fazer uma representação incorrecta, ilustrada na figura seguinte.

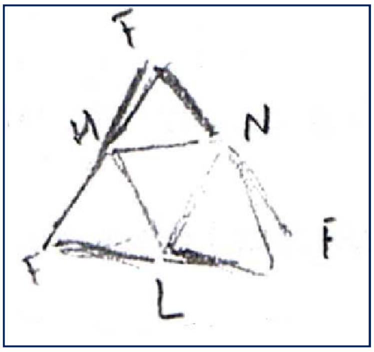


Figura n.º 49 – proposta de resolução do aluno n.º 15 à questão P3c2)

Relativamente à quarta fase do projecto, o aluno baixou bastante a sua prestação e obteve uma classificação de 7,6 valores. O seu desempenho na resolução das questões propostas na actividade está ilustrado no gráfico seguinte.

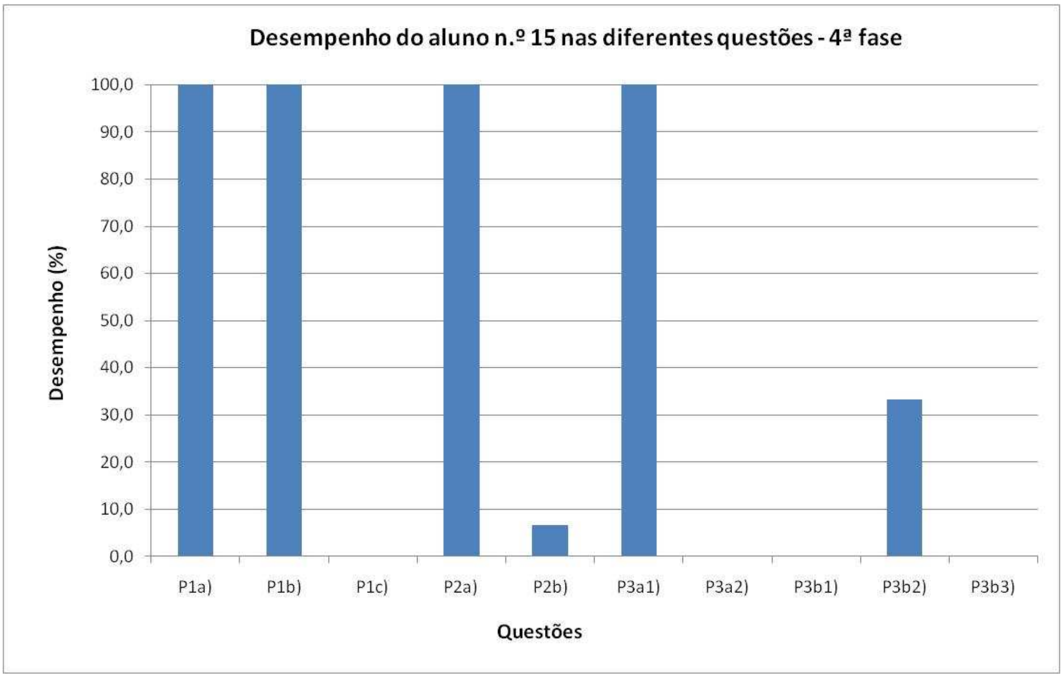


Gráfico n.º 18 – Desempenho do aluno n.º 15 nas diferentes questões da actividade TAC2 – 4ª fase

Através da análise do gráfico pode observar-se que o aluno revelou um baixo desempenho nas questões P1c), P2b), P3a2), P3b1) e P3b3).

Na questão P1c) não efectuou correctamente o desenho da secção e na questão P2b) pedia-se novamente a planificação de uma pirâmide e o aluno desta vez esteve mais perto de conseguir fazê-la correctamente, contudo não respeitou as medidas já que se pedia o desenho em verdadeira grandeza, assim como não respeitou o ângulo recto no vértice D, como se ilustra na figura seguinte.

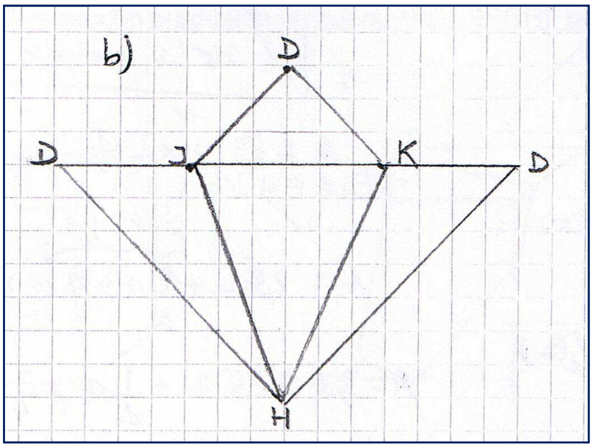


Figura n.º 50 – proposta de resolução do aluno n.º 15 à questão P2b)

Na questão P3a2) o aluno quando pretende determinar o comprimento do segmento [JI] aplica o Teorema de Pitágoras, contudo comete erros de cálculo ao operar com a raiz quadrada, como se ilustra na figura seguinte.

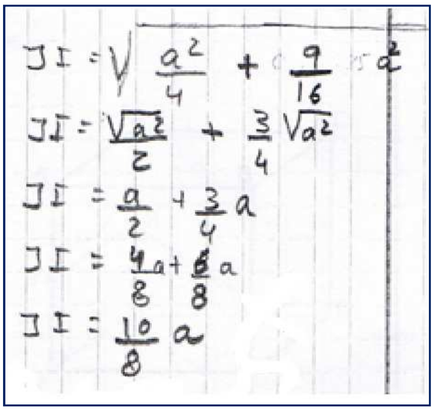


Figura n.º 51 – proposta de resolução do aluno n.º 15 à questão P3a2)

Relativamente à questão P3b1) identifica o sólido incorrectamente como uma pirâmide quadrangular, sendo este um prisma triangular e claro que na questão P3b3) como se pedia que determinasse a área e o volume do respectivo sólido o aluno procedeu de forma incorrecta.

De forma global, o desempenho deste aluno nesta quarta e última fase do estudo, revela que este ficou muito aquém das expectativas, cometendo erros que traduzem falta de pré-requisitos para os conceitos em causa.

8.2 - Caso do aluno n.º 16

Este aluno, ao longo do ano lectivo, demonstrou continuamente uma atitude e comportamento considerados adequados em sala de aula, ser empenhado nas tarefas propostas e esforçado para conseguir ultrapassar as suas dificuldades de aprendizagem. Os materiais da disciplina, estavam organizados e tirava dúvidas sempre que sentia não estar a perceber um determinado conceito das matérias leccionadas.

Começou por ter uma avaliação sumativa de treze valores no final do primeiro período, contudo acabou por terminar o 10º ano com a classificação de doze valores.

Relativamente ao projecto, obteve na primeira fase do estudo uma classificação muito fraca de 2,5 valores, estando o seu desempenho, nas diferentes questões desta actividade, ilustrado no gráfico seguinte.

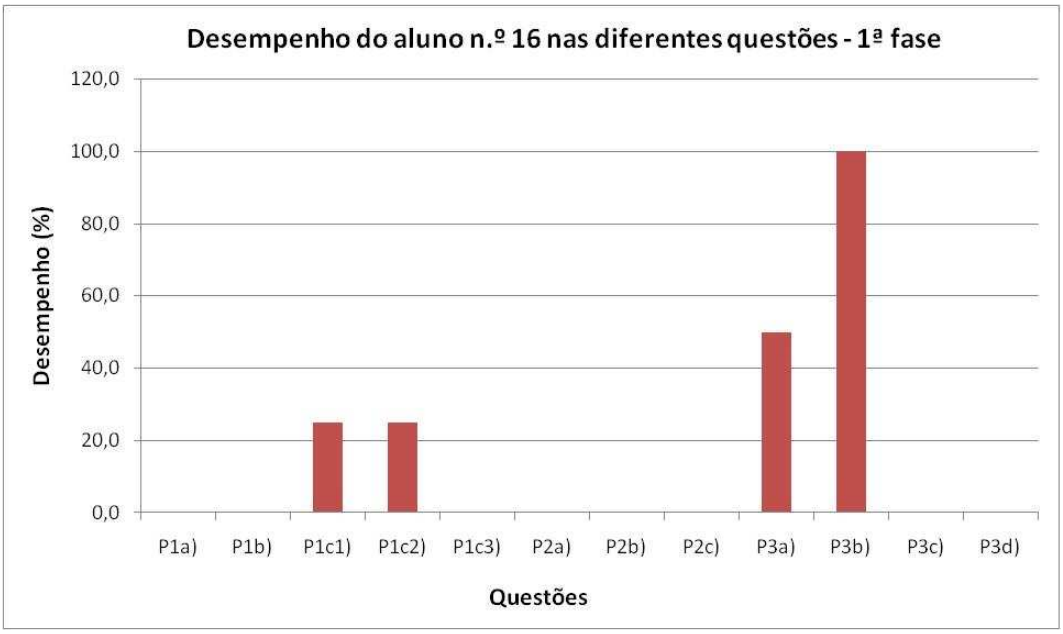


Gráfico n.º 19 – Desempenho do aluno n.º 16 nas diferentes questões da ficha de diagnóstico – 1ª fase

Na realidade o seu desempenho foi mesmo muito fraco nesta primeira ficha de trabalho, onde comete erros quer na interpretação geométrica, quer ao nível do cálculo algébrico. Identifica sólidos como "quadrilátero" e secções como "pirâmide", calcula perímetro da "pirâmide".

No desenho da planificação da pirâmide representa o sólido no plano como que um tetraedro, como se ilustra na figura seguinte.

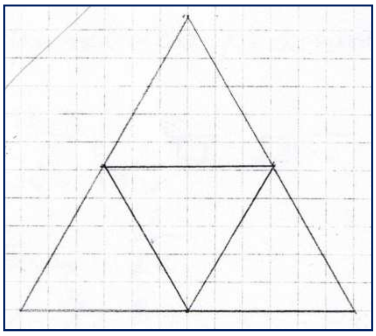


Figura n.º 52 – proposta de resolução do aluno n.º 16 à questão P1c3)

Faz uma interpretação incorrecta da figura geométrica resultante do problema dois e os cálculos de áreas e volumes respectivos estão afectos desses erros.

No problema três, interpreta correctamente a figura, identifica correctamente a secção, contudo no cálculo da área efectua cálculos incorrectos.

No que diz respeito à segunda fase do projecto, o aluno obteve uma classificação de Muito Bom, demonstrando um excelente empenho em todas as tarefas que realizou. Durante esta fase do estudo, tirou sempre dúvidas sobre os conceitos em causa e mostrou estar a esforçar-se para ultrapassar as suas dificuldades. O desempenho na realização das questões está ilustrado no gráfico seguinte.

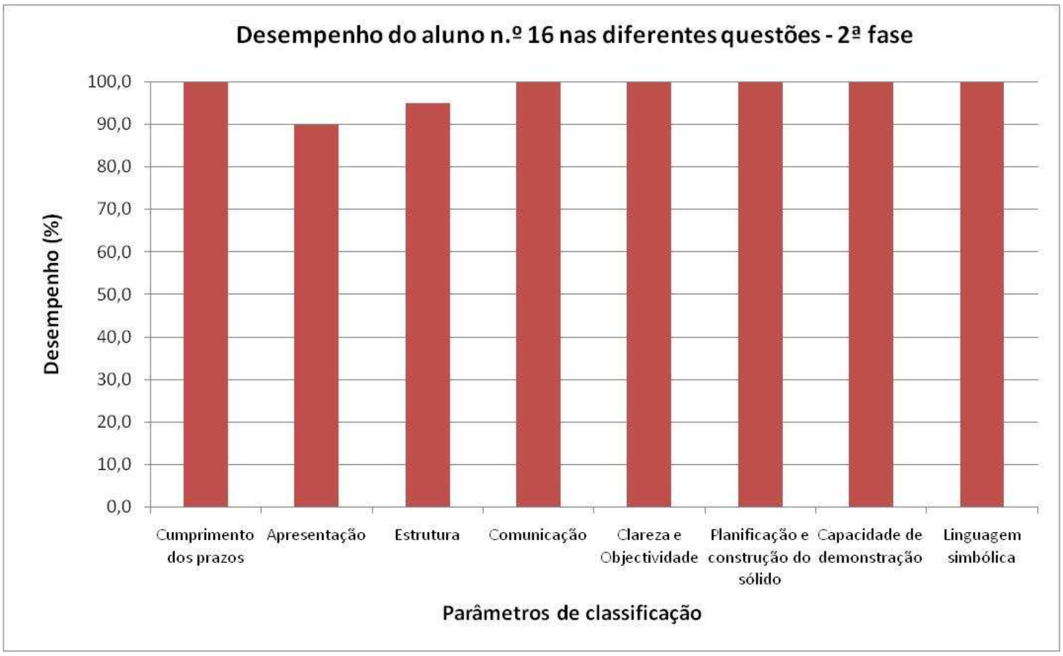


Gráfico n.º 20 – Desempenho do aluno n.º 16 nas diferentes questões da actividade "vdnp" – 2ª fase

Coube ao aluno a actividade 1 da segunda fase intitulada "vamos descobrir novos poliedros", onde o seu sólido de partida era um cubo e a partir das seis pirâmides internas geometricamente iguais, se voltadas para fora, obteria o Dodecaedro rômbico, como se ilustra na seguinte figura.

Figura n.º 53 – foto de sólido construído pelo aluno n.º 16 na actividade "vdnp"

No que concerne à terceira fase do projecto, o aluno voltou a baixar o seu desempenho, tendo agora obtido uma classificação de 12,5 valores, e o seu desempenho na resolução das questões propostas na actividade está ilustrado no gráfico seguinte.

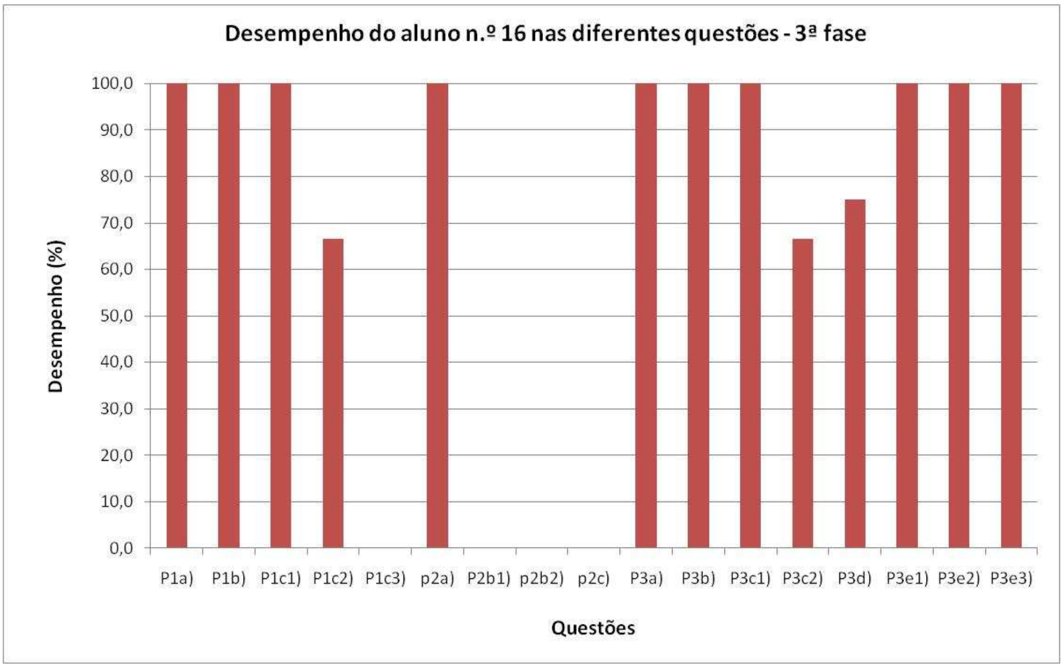


Gráfico n.º 21 – Desempenho do aluno n.º 16 nas diferentes questões da actividade TAC – 3ª fase

Através da análise do gráfico pode observar-se que o aluno revelou um baixo desempenho nas questões P1c3), P2b1), P2b2) e P2c).

Na questão P1c3) era dado o volume do tetraedro e pedia-se para determinar o volume do octaedro de aresta igual a metade da aresta do tetraedro, e o aluno pensou na razão de semelhança, só que aplicou essa razão a dois sólidos que não são semelhantes, ou seja entre o tetraedro e o octaedro.

Relativamente à questão P2b1) onde se pedia para determinar a área total do prisma hexagonal, cuja base hexagonal não é regular, o aluno efectuou o cálculo da área da base utilizando a expressão do cálculo de áreas de polígonos regulares.

As questões P2b2) e P2c) dependiam de cálculos anteriores e na realidade o aluno procedeu de forma incorrecta.

Relativamente à quarta fase do projecto, o aluno volta a melhorar significativamente a sua prestação e obteve uma classificação de 17,5 valores. O seu desempenho na resolução das questões propostas na actividade está ilustrado no gráfico seguinte.

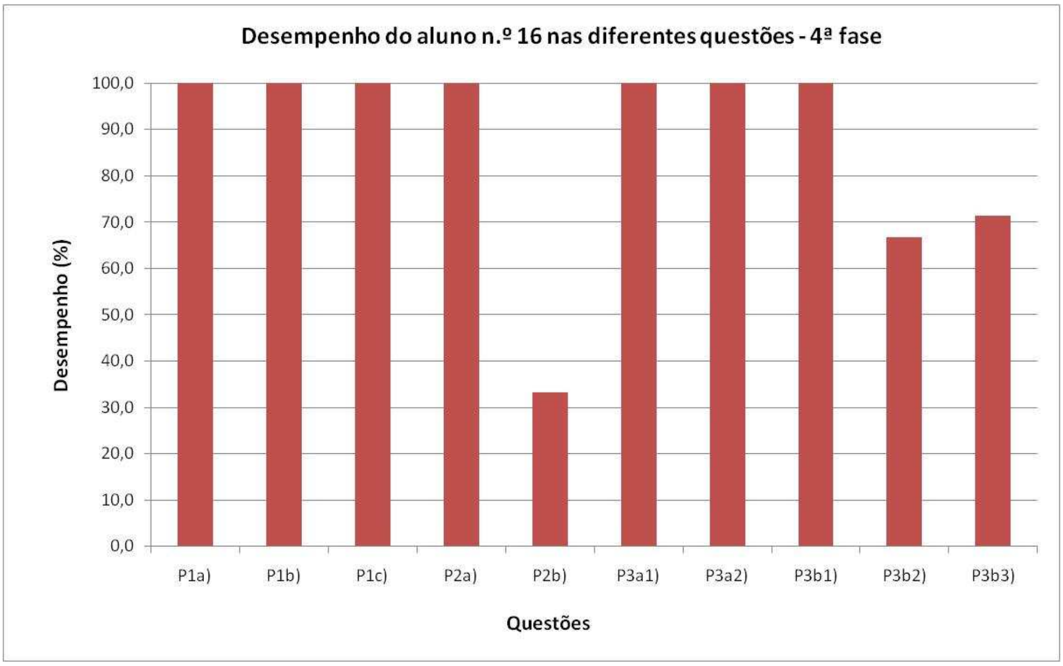


Gráfico n.º 22 – Desempenho do aluno n.º 16 nas diferentes questões da actividade TAC2 – 4ª fase

Nesta etapa, o aluno voltou a não representar correctamente a planificação pedida na questão P2b), sendo esta de uma pirâmide triangular, em que três faces são triângulos rectângulos, dois escalenos e um isósceles e a outra face é um triângulo acutângulo isósceles. O aluno representou a planificação da seguinte forma.

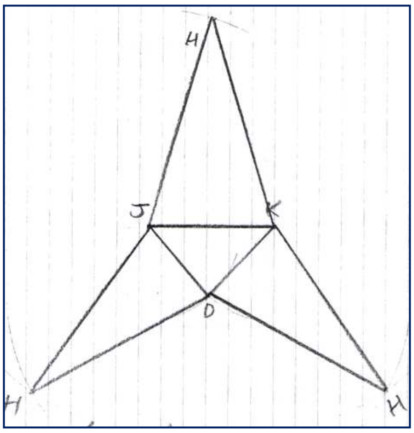


Figura n.º 54 – proposta de resolução do aluno n.º 16 à questão P2b)

O aluno cometeu ainda erros de cálculo no problema três por não considerar uma das faces no cálculo da área do prisma triangular.

8.3 - Caso do aluno n.º 18

Foi um aluno que demonstrou continuamente uma atitude e comportamento considerados adequados em sala de aula, ter os materiais da disciplina bem organizados, ser empenhado nas tarefas propostas e esforçado para conseguir ultrapassar as suas enormes dificuldades, embora muitas das vezes sem o sucesso desejado, porque realmente revelou de forma contínua ter bastantes dificuldades de aprendizagem. Talvez a sua personalidade também não o ajudasse, já que foi sempre muito introvertido e raramente tirava dúvidas, estando sentado ao lado do colega n.º 16, era a ele que muitas vezes recorria quando não estava a perceber um determinado conceito ou a realização de um determinado exercício.

Começou por ter uma avaliação sumativa de oito valores no primeiro período, e devido ao seu esforço e empenho conseguiu terminar o 10º ano com a classificação de dez valores.

Relativamente ao projecto, obteve na primeira actividade uma classificação muito fraca de 1,5 valores e o seu desempenho nas diferentes questões desta actividade está ilustrado no gráfico seguinte.

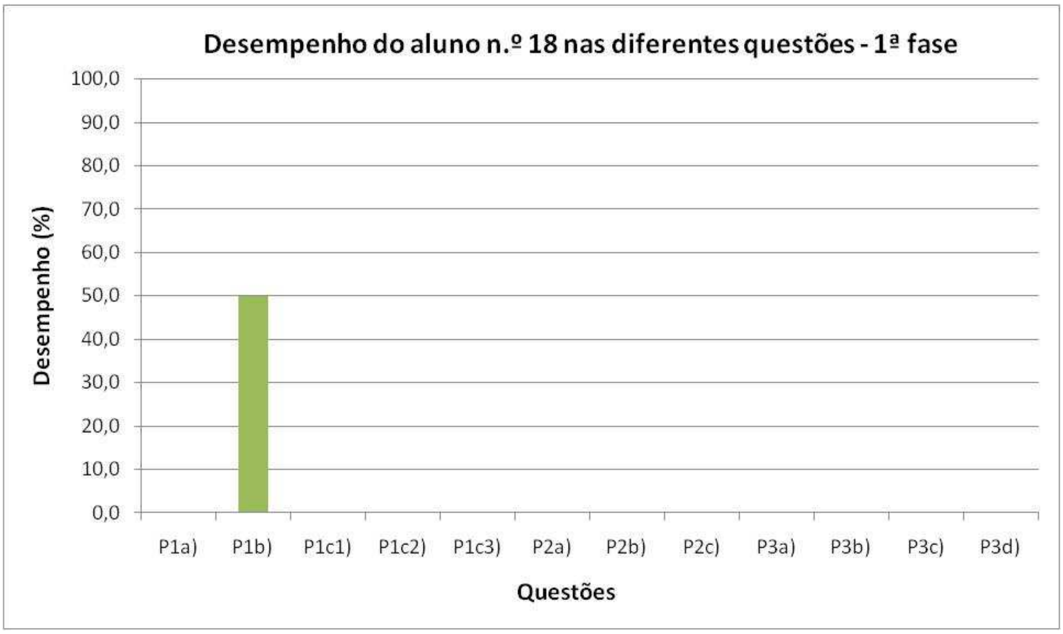


Gráfico n.º 23 – Desempenho do aluno n.º 18 nas diferentes questões da ficha de diagnóstico – 1ª fase

Na realidade o aluno apenas conseguiu no problema P1 identificar correctamente a secção triangular determinada pelo plano de corte e calcular correctamente o seu perímetro.

Ainda no problema P1, afirma, incorrectamente, que o sólido obtido é um “trapézio” e de resto não resolve mais nada.

No que diz respeito à segunda fase do projecto, o aluno voltou a ter uma prestação muito fraca, revelou imensas dificuldades na resolução das tarefas propostas, apresentava dúvidas acerca de conceitos que deveriam vir assimilados do ensino básico, contudo melhorou ligeiramente na interpretação geométrica e na capacidade de visualização espacial, e conseguiu apenas à segunda vez planificar e construir o seu sólido, obtendo uma classificação final de 5,7 valores. O desempenho na realização das questões está ilustrado no gráfico seguinte.

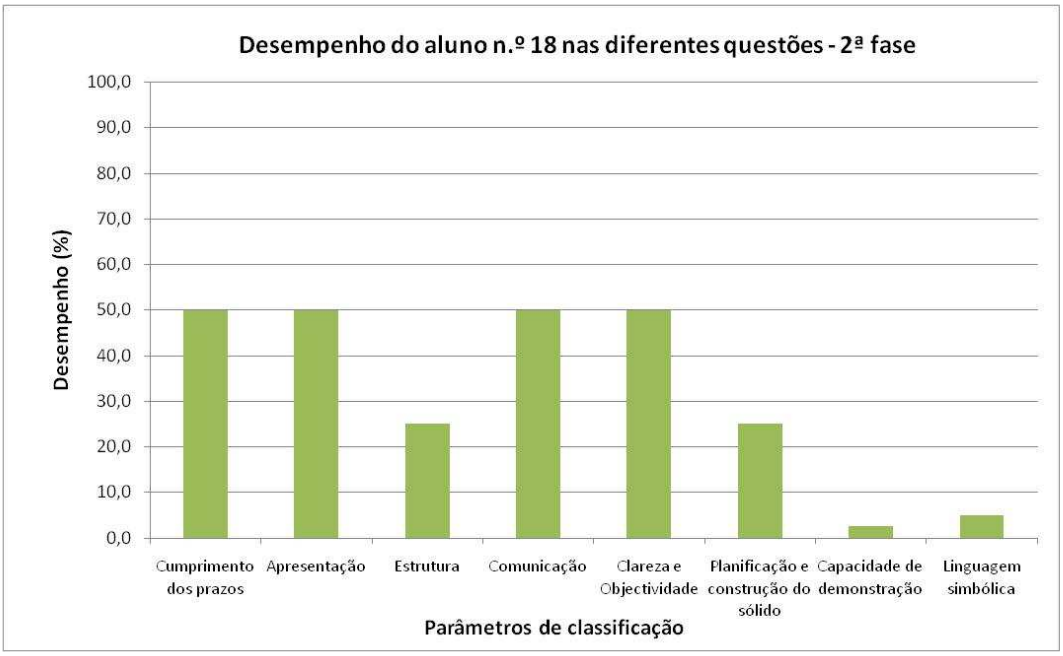


Gráfico n.º 24 – Desempenho do aluno n.º 18 nas diferentes questões da actividade “vdnp” – 2ª fase

Na realidade o aluno apenas conseguiu construir o seu tetraedro truncado, não efectuando nenhuma das outras tarefas, propostas na actividade, ao nível de cálculo algébrico e demonstração.

Figura n.º 55 – foto de sólido construído pela aluna n.º 18 na actividade “vdnp”

No que concerne à terceira fase do projecto, o aluno volta a não evoluir nos resultados obtidos, tendo agora conseguido atingir uma classificação de 6,0 valores, e o seu desempenho na resolução das questões propostas na actividade está ilustrado no gráfico seguinte.

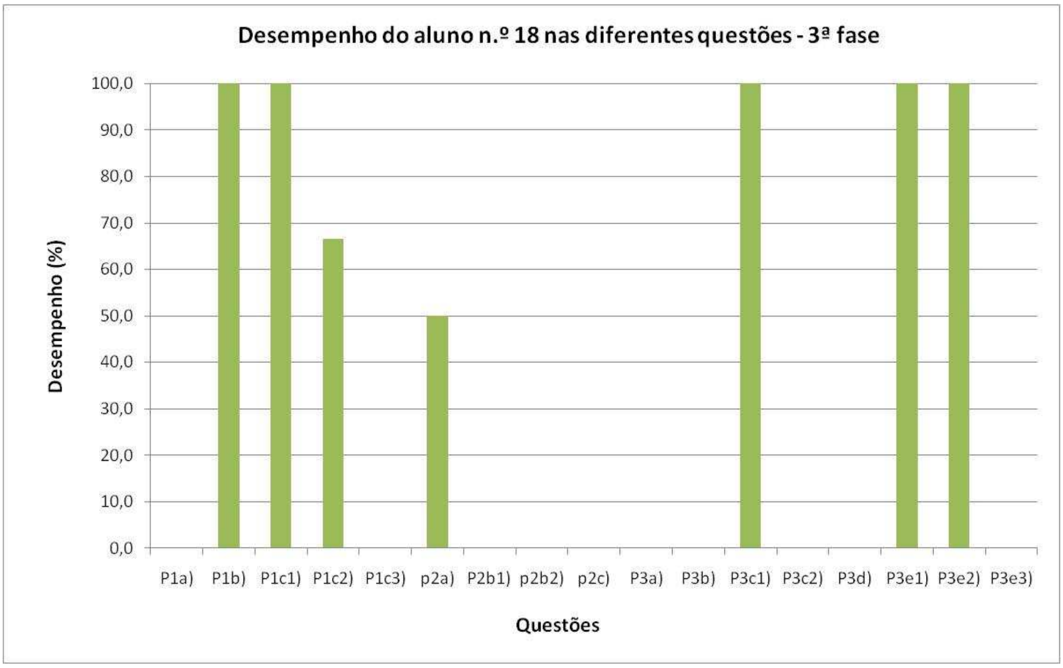


Gráfico n.º 25 – Desempenho do aluno n.º 18 nas diferentes questões da actividade TAC – 3ª fase

Mais uma vez o aluno evidencia grandes dificuldades na realização das tarefas propostas, tendo uma prestação nula em mais de metade das questões da actividade.

Relativamente ao problema P1, o aluno continua a fazer uma grande confusão entre uma figura plana e um sólido, identificando, incorrectamente, na questão P1a), a secção de “pirâmide”.

Na questão P1c3) era dado o volume do tetraedro e pedia-se para determinar o volume do octaedro de aresta igual a metade da aresta do tetraedro, e o aluno pensou na razão de semelhança, só que aplicou essa razão a dois sólidos que não são semelhantes, ou seja entre o tetraedro e o octaedro.

Relativamente à questão P2b1) onde se pedia para determinar a área total do prisma hexagonal, cuja base hexagonal não é regular, o aluno efectuou, de forma não correcta, o cálculo da área da base utilizando a expressão de cálculo de áreas de polígonos regulares. Como as questões P2b2) e P2c) dependiam de cálculos anteriores, o aluno procedeu de forma incorrecta.

Na questão P3a) o aluno não respeitou a sugestão da questão e procedeu de forma errada, consequentemente na P3b) a sua conclusão foi igualmente incorrecta.

Não respondeu às questões P3c2) e P3d). Na questão P3e3) pedia-se para determinar a área de um hexágono regular e o aluno determina incorrectamente o apótema da figura e consequentemente a área respectiva.

Na realidade, até então o aluno revelou imensa falta de pré-requisitos ao nível das competências do ensino básico, nomeadamente, em geometria, revelou falta de aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e resolução de problemas e na própria compreensão dos conceitos de perímetros, áreas e volumes e na aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução e formulação de problemas. Ao nível da álgebra revelou falta de aptidão para concretizar, em casos particulares, relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples.

Relativamente à quarta fase do projecto, já praticamente no final do ano lectivo, a prestação do aluno foi surpreendente e revelou ter-se empenhado e dedicado ao estudo para conseguir superar as suas lacunas ao nível dos seus conhecimentos e capacidades, conseguindo obter uma classificação de 19,0 valores nesta actividade. O seu desempenho na resolução das questões propostas na actividade está ilustrado no gráfico seguinte.

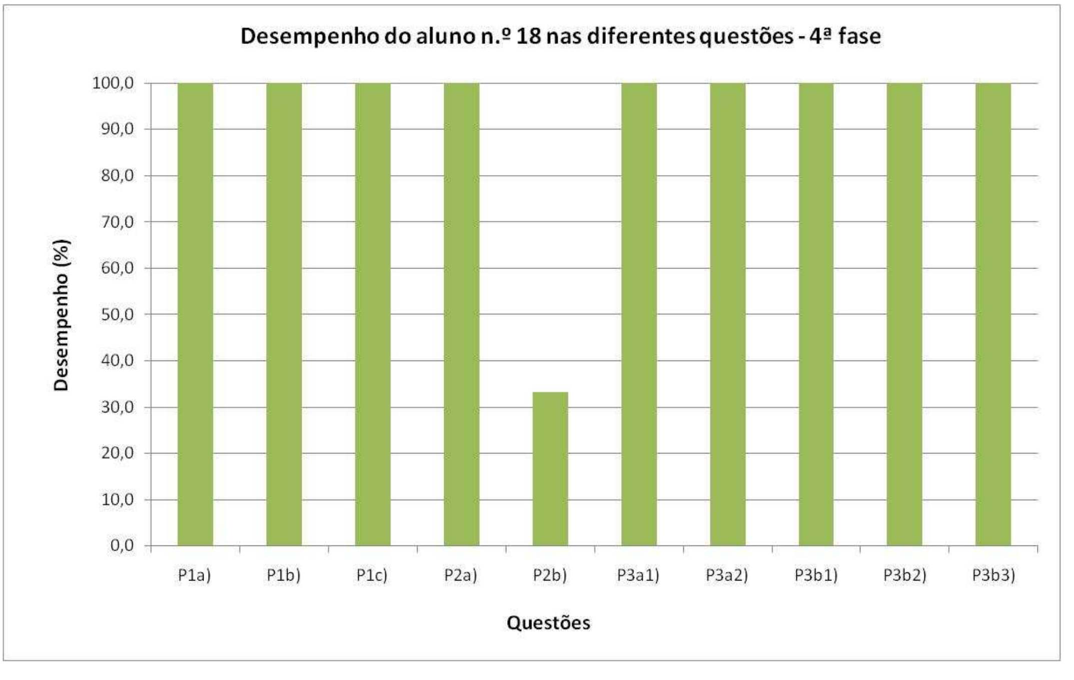


Gráfico n.º 26 – Desempenho do aluno n.º 18 nas diferentes questões da actividade TAC2 – 4ª fase

Apenas na questão P2b) referente a uma planificação em verdadeira grandeza de uma pirâmide triangular, o aluno cometeu um erro na altura de uma das faces triangulares, como se ilustra na figura seguinte.

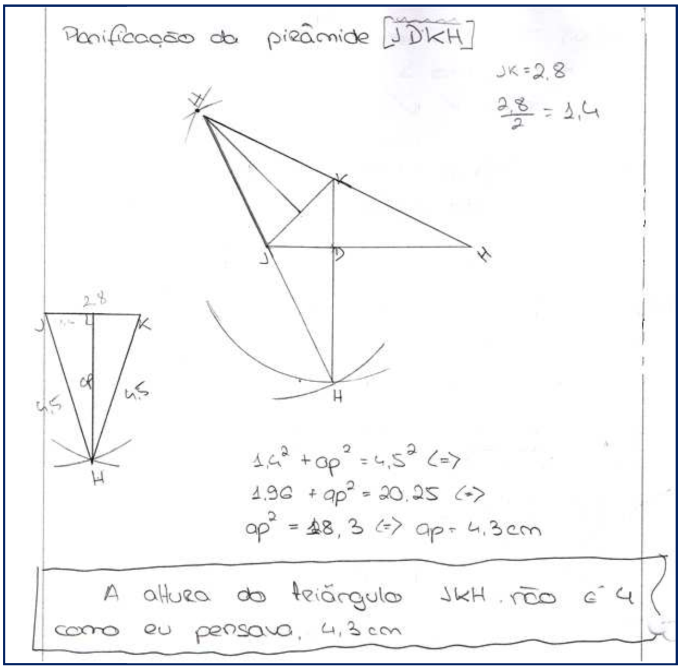


Figura n.º 56 – proposta de resolução da aluna n.º 18 à questão P2b)

9 - Avaliação das Aprendizagens dos alunos

No decorrer deste estudo de natureza investigativa, planifiquei, elaborei, corrigi e classifiquei as diversas actividades do projecto, tendo sempre em conta os princípios orientadores a respeitar numa boa avaliação.

Avaliar os conhecimentos matemáticos dos alunos significou, em particular, reunir e analisar um conjunto de dados sobre o que estes sabem a respeito de conceitos e métodos matemáticos previstos para o objectivo do projecto.

Pretendeu-se através da metodologia utilizada, avaliar o processo de aprendizagem e permitir que o aluno fosse um elemento activo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem.

De forma global, as diferentes actividades realizadas pelos alunos foram estruturadas de forma a contemplar a capacidade de visualização espacial, o raciocínio dedutivo, as capacidades de cálculo e formalismo e a comunicação matemática, no sentido de promover as competências e capacidades dos alunos.

10 - Conclusão

Cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo de ensino e aprendizagem, criando situações motivadoras e adoptando uma estratégia que implique o aluno na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa.

Penso que a aplicação deste projecto, de forma global, incutiu no aluno a responsabilidade de ele próprio procurar e investigar soluções para as tarefas a que foi sujeito. Claro que houve alunos que obtiveram continuamente sucesso nas diferentes fases do estudo, enquanto que outros manifestaram de forma contínua dificuldades em superar as tarefas a que foram sujeitos.

De qualquer forma penso que o objectivo do projecto, que visava perceber a capacidade que os alunos demonstram nos problemas de visualização espacial e construção geométrica, relacionados com truncaturas em poliedros regulares e consequentemente a obtenção de novos sólidos, representação da sua planificação, estudo das secções determinadas nos poliedros regulares por um plano de corte, assim como, calcular ou relacionar, áreas e volumes, entre os sólidos de partida e os novos sólidos obtidos, foi globalmente atingido com sucesso.

A quantidade de informação recolhida durante as diferentes etapas do estudo permitiu verificar que uma boa parte dos alunos evidenciam enormes dificuldades na visualização espacial e na forma como transpõem essa visualização para representações no plano. No que diz respeito às questões de cálculo, igualmente os alunos revelaram erros nas operações com radicais, na resolução de equações e uma enorme dificuldade em trabalhar com letras associadas a números.

A visualização é de fundamental importância na construção e exploração dos conceitos matemáticos, e associado a este facto os alunos tiveram que trabalhar em simultâneo a visualização e a parte algébrica, o que lhes permitiu testar a sua aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas a que foram sujeitos.

Este estudo de natureza investigativa, permitiu aos alunos, de certa forma, participar mais activamente no seu processo de aprendizagem, contribuindo para a construção do seu próprio conhecimento. Em algumas situações os alunos foram interventivos na tomada de decisões, conduziram as suas investigações e fizeram as suas próprias descobertas.

Como reflexão final, penso que a visualização no espaço é, sem dúvida, a capacidade fundamental a desenvolver nos alunos ao longo do estudo da Geometria.

Referências

Costa, M. C. M. (2005). *Modelo do Pensamento Visual-Espacial: Transformações Geométricas no Início da Escolaridade*, Lisboa (dissertação)

Gordo, M. M. (1993). *A Visualização Espacial e a Aprendizagem da Matemática – Um Estudo no 1º ciclo do Ensino Básico*, Lisboa (dissertação)

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano* (tese de doutoramento)

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., Lopes, I. M. C. (2001). Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário - *Matemática A 10º ano, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*

Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I., (1999). *A Matemática na Educação Básica*, Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica, Lisboa

Ministério da Educação (2001). Departamento da Educação Básica, *Currículo Nacional do Ensino Básico, Competências Essenciais*, Lisboa

Araújo, P. V. (1999). *Curso de Geometria*. (Trajectos Ciência, Vol. 5) Lisboa, Gradiva

Kaleff, A. M., Rei, D. M., Henriques, A., Figueiredo, L. G., (1994). *O Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: o Modelo de van Hiele*, Bolema

Abrantes, P. (1999). *Investigações em Geometria na Sala de Aula*, texto publicado no livro de E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*, Lisboa (1999), DEFCUL

Veloso, E. (1998). *Geometria, Temas Actuais, Materiais para Professores*, Lisboa, Instituto de Inovação Educacional

Matos, J. & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*, Lisboa, Universidade Aberta

Ponte, J. & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa, Universidade Aberta

Matos, J. M. e Gordo, M. F., (1993). *Visualização espacial: algumas actividades*, Revista Educação e Matemática, n.º 26, 2º semestre

Battista, M. (2007). *The development of geometric and spatial thinking*. Em F. Lester (Ed). Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 843- 909). Reston, VA: NCTM.

Brocardo, J., Abreu, A., Paiva, A., Boavida, A. M. et al. (2007). *A Geometria nos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico*. Setúbal: Serviços de Apoio Gráfico do IPS, Fotoarte, Lda.

Anexos

Anexo I

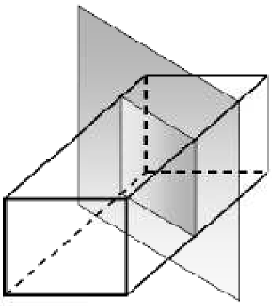
ESCOLA SECUNDÁRIA JOÃO DE BARROS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

10º ANO

CORTES NUM CUBO

PARTE I - INFORMAÇÃO



Quando intersectamos um sólido por um plano no espaço, chamamos secção a figura comum ao sólido e ao plano secante.

Para determinar as secções produzidas por cada plano deve ter-se em conta que:

Axiomas:

- Dois pontos definem uma recta
- Três pontos não colineares definem um plano.
- Recta com dois pontos comuns num plano está contida nesse plano.
- Se dois planos distintos têm um ponto comum a sua intersecção é uma recta.
- Axioma de Euclides: Por um ponto exterior a uma recta passa uma e uma só paralela a essa recta

E

- Dois planos intersectam-se segundo uma recta.
- Um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas.

Paralelismo no espaço

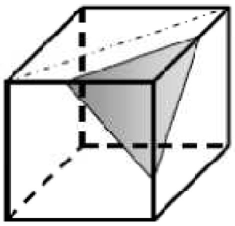
Paralelismo de recta a plano	Paralelismo de planos
Teorema: Se uma recta é paralela a outra recta dum plano então é paralela ao plano	**Teorema:** Se um plano contém duas rectas concorrentes paralelas a outro plano, então os planos são paralelos. **Teorema:** Se um plano corta planos paralelos as intersecções são paralelas. **Teorema:** Planos distintos paralelos a um terceiro são paralelos entre si.

Perpendicularidade no espaço

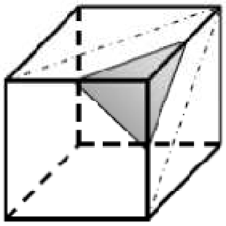
Perpendicularidade entre recta a plano	Perpendicularidade de planos
Teorema: Se uma recta é perpendicular a duas rectas concorrentes do plano então é perpendicular ao plano. **Teorema**: Se uma recta é perpendicular a um plano então é perpendicular a todas as rectas desse plano.	**Teorema:** Se um plano contém uma recta perpendicular a outro plano então os planos são perpendiculares. **Teorema:** Dois planos perpendiculares à mesma recta são paralelos entre si.

SECÇÕES NUM CUBO:

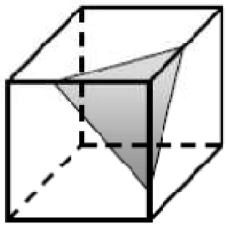
1 - O plano intersecta apenas três faces do cubo (triângulo)



Triângulo isósceles – o plano é paralelo a uma diagonal facial do cubo

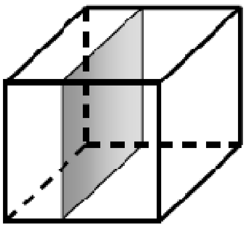


Triângulo equilátero – O plano é paralelo a duas diagonais faciais do cubo



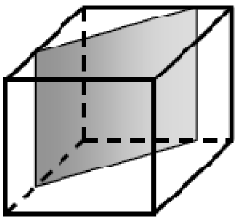
Triângulo escaleno – o plano não é paralelo a qualquer diagonal facial do cubo

2 - O plano intersecta apenas quatro faces do cubo (quadrilátero)



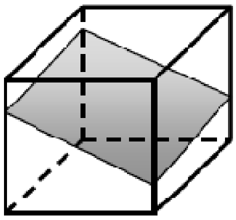
Quadrado

O plano é paralelo a uma face do cubo



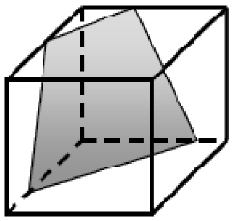
Rectângulo

O plano é paralelo a uma aresta do cubo



Paralelogramo

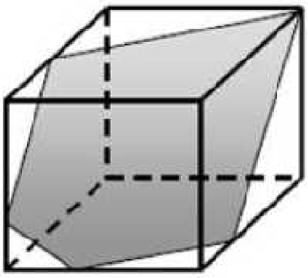
O plano intersecta quatro faces, paralelas duas a duas



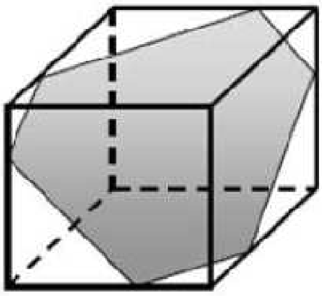
Trapézio

O plano intersecta quatro faces das quais duas são paralelas

3 - O plano intersecta apenas cinco faces do cubo (pentágono)



4 - O plano intersecta apenas seis faces do cubo (hexágono)



PARTE II - EXERCÍCIOS

Aprender:

Para representar a intersecção do cubo com o plano *PQR* sabendo que esses pontos pertencem a arestas do cubo.

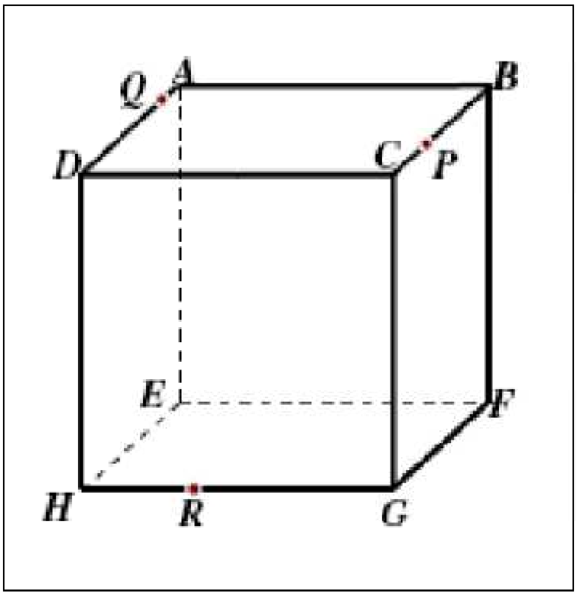
Proceda da seguinte forma:

1º Desenhe o segmento de recta [PQ] pertencente à face superior do cubo;

2º Trace por *R* uma paralela a [PQ] uma vez que um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas;

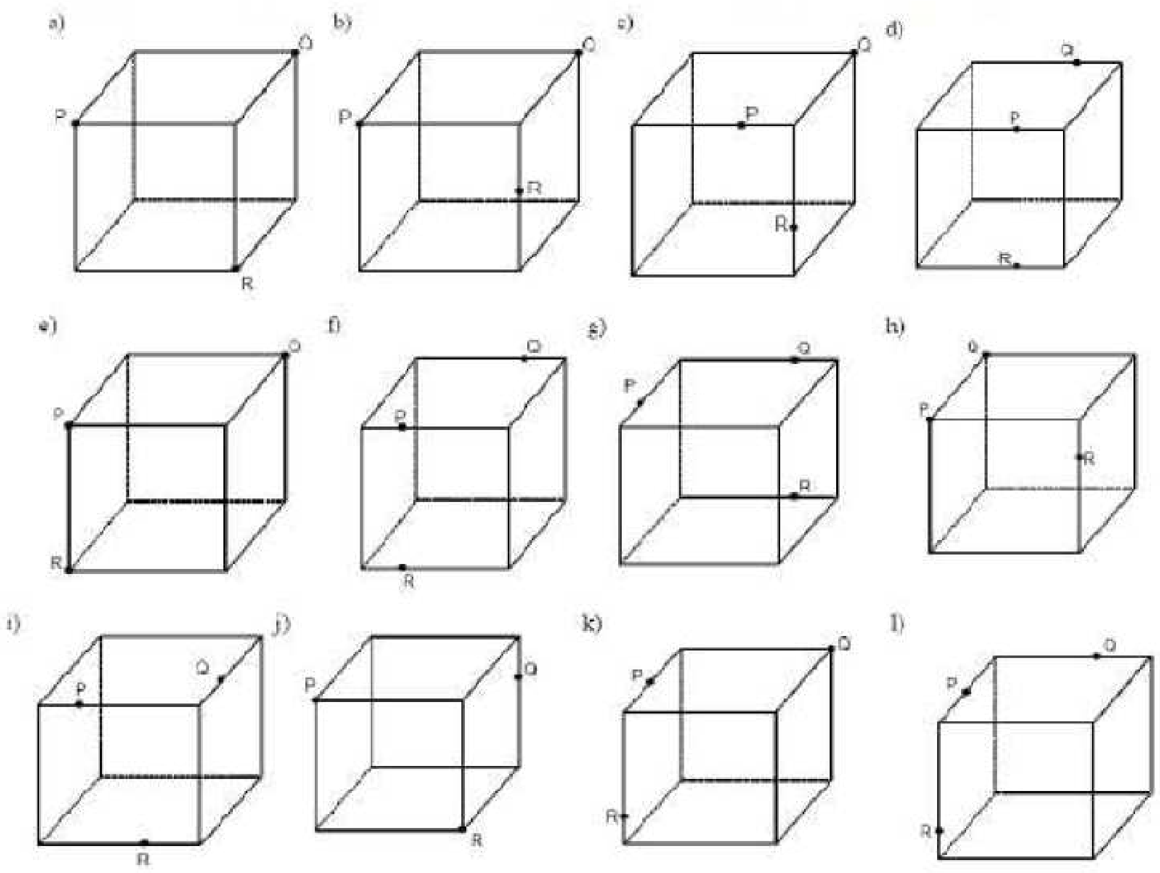
3º Trace as semi-rectas $\dot{P}Q$ e $\dot{C}D$ que se intersectam num ponto *S*, por pertencerem ao mesmo plano (face superior) A recta *SR* está contida no plano da face da frente pois tanto *R* como *S* pertencem a arestas ou prolongamentos dessa face. A recta *SR* também está contida no plano de corte *PQR* pois *S* pertence à recta *PQ*. Então, *SR* é a intersecção dos planos *PQR e DCG* pelo que se pode obter o segmento que é a intersecção do plano de corte com a face da frente;

Ou –Trace [QC]. Com a ajuda de uma régua e esquadro trace o segmento de recta paralelo a [QC] e que passa por R e intersecta a face oposta e paralela na aresta [HE] no ponto T.
De seguida, trace o segmento [QT] e tire uma paralela a este passando por P, marque com Y o ponto de intersecção com [GF]. Agora una Y a R.



4º Proceda agora da maneira usual para obter a secção produzida nos cubos do exercício seguinte:

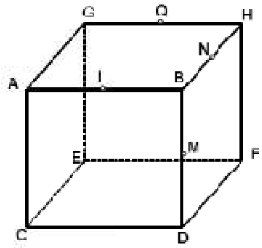
1. Desenhe sobre cada um dos cubos representados, a secção obtida pelo plano PQR e, em seguida, classifique essa secção:



Notas:

2. No cubo representado na figura Q, I, M e N são pontos médios das arestas.

O volume do cubo é . $64cm^3$



a) Justifique que AG e ID são ortogonais.

b) Determine o volume do prisma triangular de base HNF e altura [QH]

c) Qual a figura geométrica plana que se obtém no cubo quando se intersecta por um plana paralelo à face $[ABCD]$?
E se for intersectado pelo plano que contém as arestas EF e FM?

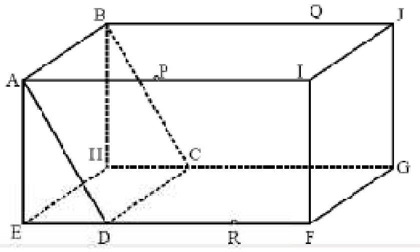
d) Desenhe a secção obtida num cubo:

d1) Pelo plano IIMC, indica o polígono obtido e calcula a sua área.	d2) Pelo plano AME, classifica-a quanto aos lados e determina a sua área.
d3) Pelo plano FGI e calcula o seu perímetro.	d4) Por um plano paralelo a CDG passando por I.
d5) Por um plano que passa por D e N e é paralelo a AH. Desenha uma planificação do sólido maior obtido.	d6) Por um plano que passa por Q e é paralelo ao plano IND e determina o perímetro da secção obtida.

3. A figura representa um paralelepípedo rectângulo seccionado pelo plano ABC, que o separou em dois sólidos diferentes.

$\overline{AB} = 9\,cm$; $\overline{EF} = 3\,\overline{ED}$ e $\overline{EA} = 2\,\overline{ED}$

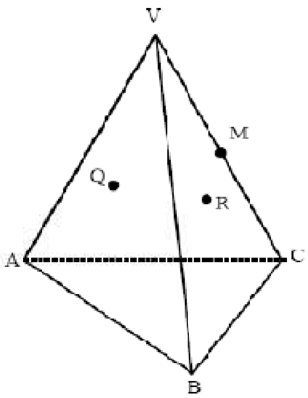
o volume do sólido menor resultante da divisão é de $49cm^3$



Determine:
a) $\overline{ED}$
b) O volume do sólido maior obtido no corte.
c) A área da secção obtida pelo plano ABC
d) Desenhe a secção obtida no paralelepípedo pelo plano PQR.

4. Considere a pirâmide triangular representada na figura.

Desenhe a secção obtida quando secciona o sólido :



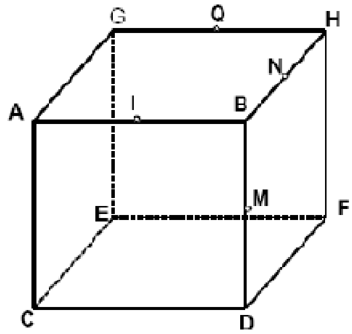
a) Pelo plano ABM.

b) Pelo plano paralelo a ABM e que contém o ponto médio de [VA]

c) Pelo plano definido pelos pontos M, Q e R, sabendo que
$Q\in\Delta[AVB]$ e $R\in\Delta[BCV]$

5. A figura representa um cubo e:

- M é o ponto médio da aresta $[FB]$;
- I é o ponto médio da aresta $[EF]$
- $\overline{AB} = 4cm$



Com base na figura responda:

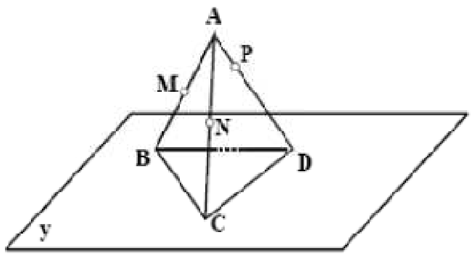
a) Qual o ângulo que formam entre si as diagonais das faces?
b) Qual a posição da recta AB relativamente à recta AM?
c) Qual a posição da recta AB relativamente à recta HE?
d) Indique uma recta concorrente com a recta HM e paralela a AB.
e) Os pontos F, M e B definem um plano?
f) As rectas BC e EF definem um plano?
g) As rectas FM e AB definem um plano ?
h) Qual a posição relativa dos planos EFD e ABC ?
i) Qual a posição da recta AG relativamente ao plano EAC ?
j) Qual a posição da recta EC relativamente ao plano ADM?
k) Desenhe a secção resultante da intersecção do cubo pelo plano :
• AMG • CIM • EGD

l) Calcule o perímetro das secções obtidas.

m) Classifique o sólido [ABCM] e determine o seu volume

6. O tetraedro da figura tem a base contida no plano y.

Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios das arestas $[AB]$ e $[AC]$; $P \in [AD]$ e P não é ponto médio de $[AD]$



a) Justifique que BC é paralela ao plano MNP.

b) Justifique que PN e CD se intersectam num ponto de y.

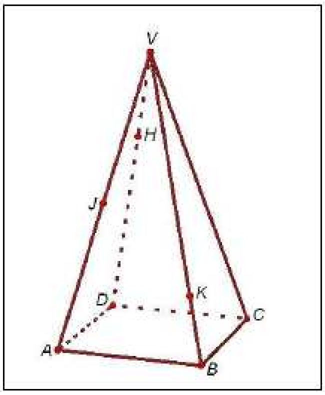
c) Quantos planos há paralelos ao plano MNP e passando por BC?

d) Desenhe a recta de intersecção do plano MNP com o plano BCD.

e) Desenhe a secção obtida pelo plano MNP.

f) Desenhe a secção obtida pelo plano CDM.

7. Considere a figura:



7.1. Indique:

1. Dois planos secantes.
2. A intersecção do plano JHV com o plano ABC.
3. A intersecção da recta VK com o plano ADC.
4. Duas rectas não complanares.

7.2. Indique, justificando, o valor lógico:

1. No plano ABV existe uma recta perpendicular ao plano ABC.
2. A intersecção dos planos JDA e KCB é o ponto V
3. A secção definida pelo plano AKC é um triângulo isósceles.
4. Os pontos A, J e V definem um plano.
5. A recta AD é paralela ao plano VBC.

7.3. Imagine a pirâmide intersectada por um plano paralelo à base e que contém o ponto K.

Sabe-se que $\overline{BK} = \sqrt{7}cm$.

1. Determina a razão de semelhança entre a pirâmide inicial e a pirâmide que se obtém depois corte.
2. Calcula o volume da pirâmide "pequena".
3. Calcula o volume do tronco de pirâmide resultante do corte.

7.4 Desenhe a secção obtida pela intersecção do plano HJK com a pirâmide.

(Sugestão: A intersecção do plano ADV com o plano VBC é a recta que passa por V e é paralela a BC)

8. Qual dos seguintes triângulos **não** pode ser obtido como secção produzida num cubo por um plano?

A. Triângulo equilátero
B. Triângulo escaleno
C. Triângulo rectângulo
D. Triângulo isósceles.

9. Considere as afirmações seguintes:

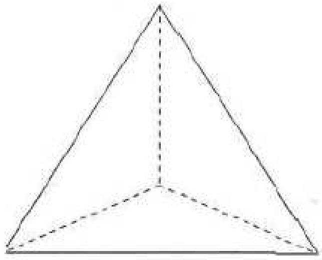
I – "Duas rectas que contêm duas arestas dum tetraedro definem um plano"

II – "Num cubo, qualquer aresta duma face é paralela à face oposta".

É correcto afirmar:

A. I e II são verdadeiras
B. I é verdadeira e II é falsa
C. I é falsa e II é verdadeira
D. I e II são falsas.

10. O sólido da figura representa um tetraedro .



1. Qual a secção produzida no sólido pelo plano definido pelos pontos médios de três arestas concorrentes no mesmo vértice?

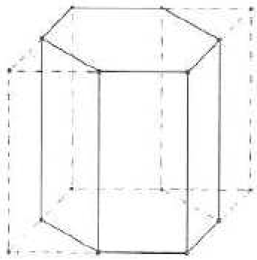
   Desenhe a secção e identifique o polígono obtido.

2. Ao truncar o sólido pelo plano referido na alínea anterior, será que se obtém um sólido regular? Qual o nome do poliedr

3. Sabendo que o volume do tetraedro é 48 cm^3 determine o volume do sólido mencionado na alínea anterior.

11. Um cubo cuja aresta mede *a cm* foi truncado da forma que a figura sugere.

Os vértices do prisma hexagonal obtido depois dos cortes, ou coincidem com os vértices do cubo ou com os pontos médios das arestas onde estão contidos.



1. Prove que o volume de cada um dos prismas triangulares que foi retirado é dado por $\frac{a^3}{8}$ cm^3.

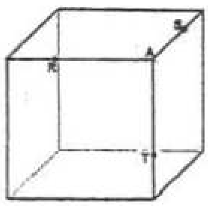
2. Determine em função de a:

   a) A área total do prisma hexagonal.

   b) O volume do prisma hexagonal.

3. Determine a razão entre os volumes dos prismas triangulares e o prisma hexagonal.

12. A figura representa um cubo com 4 cm de aresta . R,S e T são os pontos das arestas que distam $2\sqrt{2}$cm do vértice A. O perímetro da secção obtida no cubo pelo plano RST é :

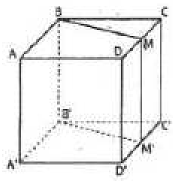


(A) $6\sqrt{6}cm$ (B) $6\sqrt{2}cm$

(C) 12cm (D) 48cm

13. Um cubo com 8 cm de aresta foi seccionado por um plano e a secção obtida é um quadrilátero, como mostraa figura. M e M' são os pontos médios das arestas a que pertencem.

O valor exacto da área da secção é :

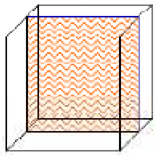


(A) $32\sqrt{3}cm^2$ (B) $32\sqrt{5}cm^2$

(C) $16+8\sqrt{5}cm^2$ (D) $16+8\sqrt{3}cm^2$

Síntese : Secções produzidas no cubo por planos de corte

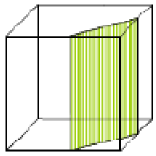
O plano intersecta quatro faces do cubo



O plano é paralelo a uma face do cubo.

Secção

QUADRADO

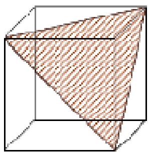


O plano de corte intersecta quatro faces e é paralelo a uma aresta do cubo.

Secção

RECTÂNGULO

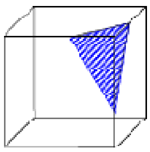
O plano intersecta três faces do cubo



O plano de corte é paralelo a duas diagonais faciais do cubo, concorrentes no mesmo vértice.

Secção

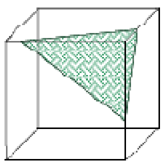
TRIÂNGULO EQUILÁTERO



O plano de corte é paralelo a uma diagonal facial.

Secção

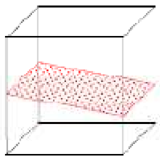
TRIÂNGULO ISÓSCLES



O plano não é paralelo a nenhuma diagonal facial.

Secção

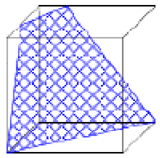
TRIÂNGULO ESCALENO



O plano de corte intersecta quatro faces, paralelas duas a duas.

Secção

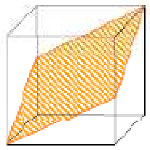
PARALELOGRAMO



O plano de corte intersecta (apenas) duas faces paralelas do cubo.

Secção

TRAPÉZIO

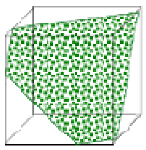


O plano de corte contém uma diagonal espacial e intersecta duas arestas opostas nos seus pontos médios.

Secção

LOSANGO

O plano intersecta cinco faces do cubo

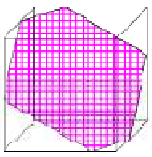


O plano de corte intersecta duas faces paralelas (pelo menos).

Secção

PENTÁGONO IRREGULAR

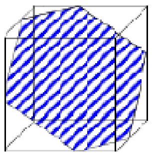
O plano intersecta seis faces do cubo



O plano de corte intersecta duas faces paralelas (pelo menos).

Secção

HEXÁGONO



O plano de corte passa nos pontos médios das arestas do cubo

Secção

HEXÁGONO REGULAR

Geometria no Espaço – Secções determinadas num cubo por um plano de corte 10

Anexo II

	Escola Secundária João de Barros **Ano Lectivo 2009/2010** **Matemática A – 10º ano, Outubro 2009** **Ficha de diagnóstico TA intersecção de um plano com um cubo, secções e truncaturas, respectivas métricas** **Nome:**______________________________ **Nº:**_____ **Turma:**_____ **Data:** ___/___/___

P1. Considere o cubo [ADCBGFEH], cuja aresta mede 6 cm e que é interceptado por um plano que passa nos pontos médios das arestas [DE], [EH] e [EF], respectivamente J, K e I.

a) Caracterize o sólido [IJKE].

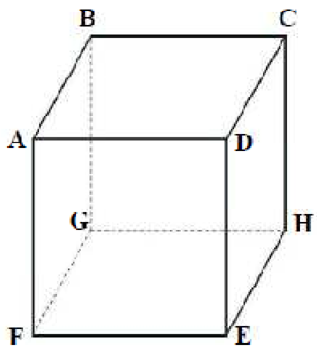
b) Identifique, justificando, a secção que resulta da intersecção do plano com o cubo. Determine o seu perímetro e a sua área.

c) O plano IJK decompôs o cubo em dois novos sólidos – uma pirâmide e um cubo truncado.

c_1) Qual o volume da pirâmide [IJKE]?

c_2) Qual o volume do cubo truncado?

c_3) Desenhe uma planificação da pirâmide [IJKE].



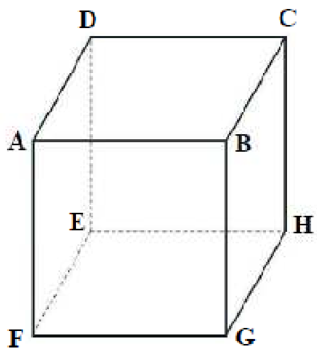
P2. Considere o cubo [ABCDEFGH], cuja aresta mede 6 cm.

- I é ponto médio de [AD]
- J é ponto médio de [DC]
- O plano α que passa em I e J é paralelo a [DE]

a) Identifique a secção determinada no cubo pelo plano α e determine o seu perímetro e a sua área.

b) Identifique o sólido resultante do corte e que tem D por vértice. Determine o seu volume.

c) Identifique o outro sólido resultante da decomposição do cubo, fundamentando a afirmação. Determine o seu volume.



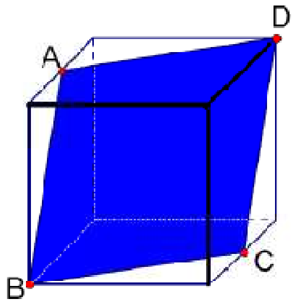
P3. A e C são os pontos médios das arestas onde estes pontos estão contidos, B e D são vértices do cubo. Sabe-se que o volume do cubo é $V_{cubo}=4096\ cm^3$.

a) Qual a forma do polígono determinado no cubo pelo plano ABC? Justifica.

b) Calcula o valor exacto do perímetro da secção.

c) Calcula a medida da diagonal [AC].

d) Qual o valor exacto da área da secção determinada no cubo pelo plano ABC.



Anexo III

Escola Secundária João de Barros

Matemática A - 10º A

TA - intersecção de um plano com um cubo, secções e truncaturas, respectivas métricas

27 de Outubro

Nº	Nome	versão	P1					P2			P3				Total
			a)	b)	c)			a)	b)	c)	a)	b)	C)	d)	
					c1	c2	c3								
			10	30	20	20	20	30	10	10	10	10	10	20	200
1	Catarina Dias	A	2,5	0	0	0	0	0	0	0	10	5	5	0	22,5
2	Catarina Bravo	B	2,5	5	18	20	20	0	0	0	5	10	10	0	90,5
3	Cláudia Gonçalves	A	2,5	20	0	5	0	30	0	0	5	10	0	0	72,5
5	David Gonçalves	B	0	25	20	20	15	28	1	5	0	0	0	0	114,0
6	Diogo Aziz	B	5	2	2	0	0	30	0	0	5	10	10	18	82,0
7	Emely Rocha	A	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	5,0
8	Gonçalo Santos	A	2,5	20	20	20	10	30	10	10	10	5	5	0	142,5
9	Helena Guedes	B	0	29	20	20	15	29	0	0	10	0	0	0	123,0
10	Isa Carvalho	B	5	8	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	18,0
11	Isis Montenegro	A	2,5	10	20	20	0	0	0	0	0	1	0	0	53,5
12	João Pais	B	5	0	2	19	5	0	0	0	0	0	0	0	31,0
13	João Carreto	B	5	20	1	0	15	1	0	0	5	9	0	0	56,0
14	João Beles	B	2,5	10	5	5	15	10	5	0	10	10	0	5	77,5
15	Jorge Laranjeira	A	0	20	5	5	0	30	0	0	10	10	0	0	80,0
16	José Pêgo	A	0	0	5	5	0	0	0	0	5	10	0	0	25,0
18	Loredana Mihu	A	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15,0
20	Manuel Reis	B	0	20	5	15	0	0	9	0	10	4	0	0	63,0
21	Maria Mourão	A	5	5	20	20	0	20	10	10	10	10	0	0	110,0
22	Maria Inês Pereira	A	2,5	20	5	5	10	30	0	0	5	0	0	0	77,5
23	Marta Pereira	B	5	25	1	20	10	30	10	10	5	10	0	0	126,0
24	Nicoleta Barani	B	0	1	1	20	0	0	0	0	0	0	0	0	22,0
25	Pedro Ferreira	A	0	10	20	20	0	20	5	5	0	0	0	0	80,0
26	Ruben Martins	A	10	20	20	5	0	30	10	10	0	0	0	0	105,0
27	Sara Cunha	A	5	20	20	5	10	1	0	0	0	0	0	0	61,0
28	Vitor Arrifes	B	5	1	0	20	15	0	0	5	0	0	0	0	46,0
29	André Branco	A	5	20	0	0	0	30	5	0	0	0	0	0	60,0
30	Teresa Gaspar														

Anexo IV

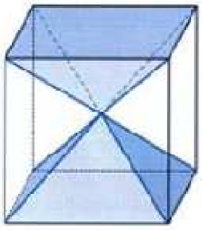
Escola Secundária João de Barros
Matemática – A
10º Ano

"Vamos Descobrir Novos Poliedros"

Actividade 1

Pretende-se, com esta actividade, e utilizando o que estudou e trabalhou até aqui, que parta para a descoberta de "novos" poliedros.

1. As quatro diagonais espaciais do cubo permitem decompô-lo em pirâmides regulares de base quadrada.



Note que:

- a base de cada pirâmide é uma face do cubo
- o vértice das pirâmides é o centro do cubo

Supondo que a aresta do cubo é igual a a, que relação existe entre a área da superfície do cubo e a das duas pirâmides (a escuro)?

2. Relacione o volume de cada uma das pirâmides (a escuro) com o volume do cubo.

Calcule o volume não ocupado pelas pirâmides.

3. Se "voltássemos o sólido para fora", obtínhamos um novo sólido – o Dodecaedro Rômbico.

a) Qual o seu volume?

b) Caracterize o novo sólido que obteve (n.º de faces de cada tipo, vértices e arestas; forma das faces).

4. Escolha uma medida para a aresta do cubo e construa o novo sólido.

5. Faça um pequeno relatório da actividade realizada.

Curiosidade:

O dodecaedro rômbico foi inventado por quem?
Faz uma pequena descrição sobre os sólidos desse matemático.

Núcleo de Estágio 2009/2010

Escola Secundária João de Barros
Matemática – A
10º Ano

"Vamos Descobrir Novos Poliedros"

Actividade 2

Pretende-se, com esta actividade, e utilizando o que estudou e trabalhou até aqui, que parta para a descoberta de "novos" poliedros.

Num cubo "substitua" cada aresta por um vértice situado no seu ponto médio.
(Truncaturas dos vértices do cubo, pelos pontos médios das suas arestas.)

1. Identifique e caracterize (n.º de faces de cada tipo, vértices e arestas; forma das faces) o novo sólido.

2. Escolha uma medida para a aresta do cubo e construa o novo sólido.

3. Construiu um sólido com dimensões específicas. Agora generalize para uma situação qualquer em que a aresta do cubo é a . Determine a relação que existe entre a área da superfície do cubo e a do sólido obtido.

4. Determine a relação entre os volumes do cubo e do sólido obtido.

5. Faça um relatório da actividade realizada.

Curiosidade:

Qual a relação entre o modelo do sistema solar idealizado por Johannes Kepler (1571-1630) e os sólidos platónicos?

Núcleo de Estágio 2009/2010

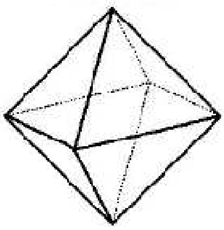
Escola Secundária João de Barros
Matemática – A
10º Ano

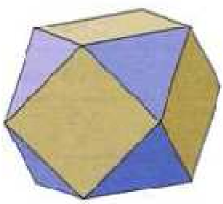
"Vamos Descobrir Novos Poliedros"

Actividade 3

Pretende-se, com esta actividade, e utilizando o que estudou e trabalhou até aqui, que parta para a descoberta de "novos" poliedros.

Num octaedro, "substitua" cada aresta por um vértice situado no seu ponto médio.





1. Identifique e caracterize (n.º de faces de cada tipo, vértices e arestas; forma das faces) o novo sólido.

2. Escolha uma medida para a aresta do octaedro e construa o novo sólido.

3. Construiu um sólido com dimensões específicas. Agora generalize para uma situação qualquer em que a aresta do octaedro é b . Determine a relação que existe entre a área da superfície do octaedro e a do sólido obtido.

4. Relacione os volumes do octaedro e do sólido obtido.

5. Faça um relatório da actividade realizada.

Curiosidade:

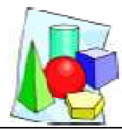
Explique a teoria dos cinco sólidos regulares.

Núcleo de Estágio 2009/2010

Escola Secundária João de Barros

Matemática – A

10º Ano



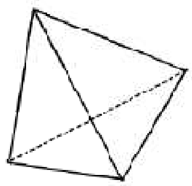
"Vamos Descobrir Novos Poliedros"

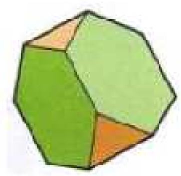
Actividade 4

Pretende-se, com esta actividade, e utilizando o que estudou e trabalhou até aqui, que parta para a descoberta de "novos" poliedros.

A partir de um tetraedro, por truncatura, obtém-se um poliedro. Os planos de corte são definidos por pontos nas arestas de tal maneira que:

- cada aresta do tetraedro seja dividida em três segmentos
- todas as arestas do novo poliedro sejam congruentes





1. Identifique e caracterize (n.º de faces de cada tipo, vértices e arestas; forma das faces) o novo sólido.

2. Escolha uma medida para a aresta do tetraedro e construa o novo sólido.

3. Construiu um sólido com dimensões específicas. Agora generalize para uma situação qualquer em que a aresta do tetraedro é a . Determine a relação que existe entre a área da superfície do tetraedro e a do sólido obtido.

4. E que relação existe entre os volumes dos dois poliedros?

5. Faça um pequeno relatório da actividade realizada.

Curiosidade:

O sólido que obteve foi inventado por quem?

Faz uma pequena descrição sobre os sólidos desse matemático.

Núcleo de Estágio 2009/2010

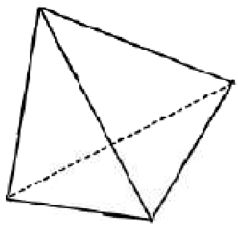
Escola Secundária João de Barros
Matemática – A
10º Ano

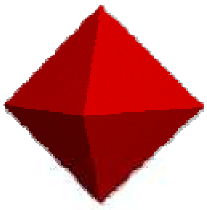
"Vamos Descobrir Novos Poliedros"

Actividade 5

Pretende-se, com esta actividade, e utilizando o que estudou e trabalhou até aqui, que parta para a descoberta de "novos" poliedros.

Num tetraedro regular, "substitua" cada aresta por um vértice situado no seu ponto médio.





1. Identifique e caracterize (n.º de faces de cada tipo, vértices e arestas; forma e das faces) o novo sólido.

2. Escolha uma medida para a aresta do tetraedro e construa o novo sólido.

3. Construiu um sólido com dimensões específicas. Agora generalize para uma situação qualquer em que a aresta do tetraedro é b . Determine a relação que existe entre a área da superfície do tetraedro e a do sólido obtido.

4. Relacione os volumes do tetraedro e do sólido obtido.

5. Faça um pequeno relatório da actividade realizada.

Curiosidade:

Porque é que só existem cinco sólidos platónicos?

Núcleo de Estágio 2009/2010

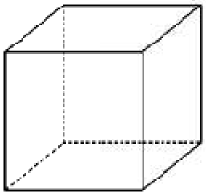
Escola Secundária João de Barros
Matemática – A
10º Ano

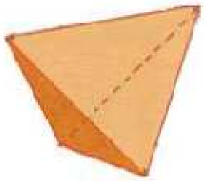
"Vamos Descobrir Novos Poliedros"

Actividade 6

Pretende-se, com esta actividade, e utilizando o que estudou e trabalhou até aqui, que parta para a descoberta de "novos" poliedros.

A partir de um cubo, obtém-se um novo poliedro através das suas diagonais faciais.





1. Identifique e caracterize (n.º de faces de cada tipo, vértices e arestas; forma das faces) o novo sólido.

2. Escolha uma medida para a aresta do cubo e construa o novo sólido.

3. Construiu um sólido com dimensões específicas. Agora generalize para uma situação qualquer em que a aresta do cubo é b. Determine a relação que existe entre a área da superfície do cubo e a do sólido obtido.

4. Relacione os volumes do cubo e do sólido obtido.

5. Faça um pequeno relatório da actividade realizada.

Curiosidade:

Os sólidos platónicos manifestam-se na natureza, através de cristais, minerais, organismos vivos, moléculas, etc...

Indica exemplos de cristais com a forma dos sólidos platónicos.

Núcleo de Estágio 2009/2010

Anexo V

Escola Secundária João de Barros

Matemática A - 10º A

Actividade "Vamos descobrir novos poliedros"

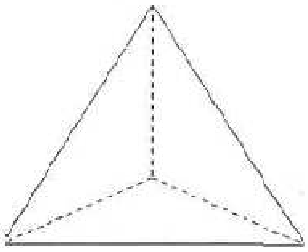
Novembro e Dezembro de 2009

Nº	Nome	Cumprimento dos prazos de realização das tarefas	Relatório							Total
			Apresentação	Estrutura	Comunicação	Clareza e objectividade	Planificação e Construção do novo sólido	Capacidade de demosntração	Linguagem simbólica	
		20	10	20	30	20	40	40	20	200
1	Catarina Dias	16	2	10	15	10	18	20	10	101,0
2	Catarina Bravo	20	2	10	15	10	35	25	15	132,0
3	Cláudia Gonçalves	18	5	14	15	10	22	20	15	119,0
5	David Gonçalves	6	6	17	20	15	26	20	15	125,0
6	Diogo Aziz	20	8	18	15	15	30	20	15	141,0
7	Emely Rocha	11	0	0	0	0	3	0	5	19,0
8	Gonçalo Santos	20	8	17	15	15	24	20	15	134,0
9	Helena Guedes	10	9	18	25	18	22	0	5	107,0
10	Isa Carvalho	18	5	10	15	10	5	5	5	73,0
11	Isis Montenegro	16	0	0	0	0	3	0	0	19,0
12	João Pais	20	0	0	0	0	5	0	0	25,0
13	João Carreto	18	0	0	0	0	21	15	10	64,0
14	João Beles	20	8	17	17	15	16	0	10	103,0
15	Jorge Laranjeira	20	9	18	15	15	16	15	5	113,0
16	José Pêgo	20	9	19	30	20	40	40	20	198,0
18	Loredana Mihu	10	5	5	15	10	10	1	1	57,0
20	Manuel Reis									0,0
21	Maria Mourão	18	10	20	30	20	40	40	20	198,0
22	Maria Inês Pereira	15	8	18	20	18	40	40	20	179,0
23	Marta Pereira	20	8	18	17	16	17	10	5	111,0
24	Nicoleta Barani	13	0	0	0	0	17	20	5	55,0
25	Pedro Ferreira	10	7	17	20	15	10	0	5	84,0
26	Ruben Martins	8	0	0	0	0	5	0	0	13,0
27	Sara Cunha	20	7	14	15	10	18	20	10	114,0
28	Vitor Arrifes	18	7	14	15	10	10	0	0	74,0
29	André Branco	13	0	0	0	0	9	0	5	27,0
30	Teresa Gaspar	20	10	20	30	20	40	40	15	195,0

Anexo VI

	Escola Secundária João de Barros Ano Lectivo 2009/2010 Matemática A 10º ano, Janeiro 2010 Ficha de trabalho TAC1 – intersecção de planos em sólidos regulares, secções e truncaturas, respectivas métricas Nome:______________ Nº:_____ Turma:_____ Data: ___/___/___

P1. O sólido da figura representa um tetraedro de aresta ***b* cm**.



a) Qual a secção produzida no sólido pelo plano definido pelos pontos médios de três arestas concorrentes no mesmo vértice?

b) Desenhe a secção e identifique o polígono obtido.

c) Ao truncar o sólido (tetraedro) por planos definidos pelos pontos médios das suas arestas:

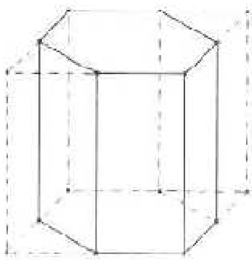
c_1) será que se obtém um sólido regular? Qual o nome do poliedro obtido?

c_2) qual o valor da aresta do novo sólido obtido?

c_3) Sabendo que o volume do tetraedro é 48 cm^3 determine o volume do sólido mencionado na alínea anterior.

P2. Um cubo cuja aresta mede ***a* cm** foi truncado da forma que a figura sugere.

Os vértices do prisma hexagonal obtido depois dos cortes, ou coincidem com os vértices do cubo ou com os pontos médios das arestas onde estão contidos.



a) Prove que o volume de cada um dos prismas triangulares que foi retirado é dado por $\frac{a^3}{8}$ cm^3.

b) Determine em função de *a*:

b_1) A área total do prisma hexagonal.

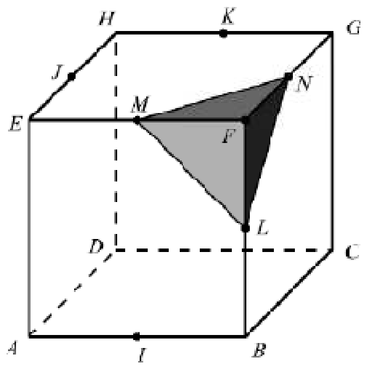
b_2) O volume do prisma hexagonal.

c) Determine a razão entre os volumes dos prismas triangulares e o prisma hexagonal.

P3. Na figura está representado o cubo [ABCDEFGH].

Cada um dos pontos I, J, K, L, M e N é ponto médio de uma aresta.

O volume do cubo é igual a 8 cm^3



a) Considere o trajecto mais curto de I a J que passa pela aresta [EF].

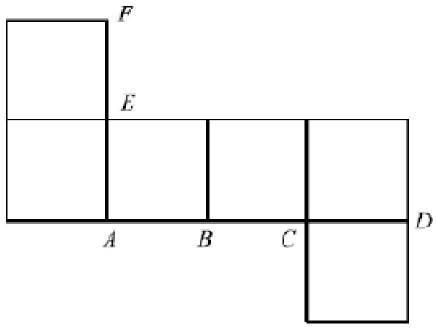
Determine o comprimento desse trajecto.

Sugestão: comece por desenhar uma planificação do cubo, na qual esse trajecto possa ser representado por um segmento de recta.

b) Seja P o ponto do trajecto referido na alínea anterior que pertence à aresta [EF].

Determine a distância do ponto P a cada um dos extremos dessa aresta.

c) Na figura ao lado está desenhada, em tamanho reduzido, uma planificação do cubo.



c_1) Represente, neste desenho, a região do cubo que está sombreada.

c_2) Desenhe uma planificação da pirâmide [FLMN].

d) Determine a altura da pirâmide [FLMN], relativa à base [LMN].

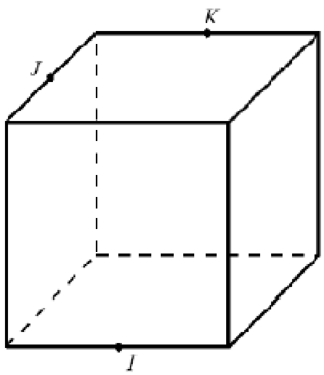
Sugestão: comece por determinar o volume da pirâmide, tomando para base uma das faces sombreadas.

e) Considere a secção produzida no cubo pelo plano IJK.

e_1) Desenhe essa secção, utilizando a figura do lado.

e_2) Determine o seu perímetro.

e_3) Determine a sua área.



Núcleo de Estágio 2

Anexo VII

Escola Secundária João de Barros

Matemática A - 10º A

TAC1 - intersecção de planos de corte em sólidos regulares, secções e truncaturas, respectivas métricas

Janeiro Fevereiro de 2010

Nº	Nome	P1					P2				P3								Total
		a)	b)	c)			a)	b)		c)	a)	b)	c)		d)	e)			
				c1	c2	c3		b1	b2				c1	c2		e1	e2	e3	
		5	5	5	15	20	10	20	10	10	10	10	15	15	20	10	10	10	200
1	Catarina Dias	5	5	5	10	15	10	0	0	0	5	7	15	10	0	10	10	10	117,0
2	Catarina Bravo	5	5	5	10	0	10	0	10	10	10	10	15	10	10	10	10	10	140,0
3	Cláucia Gonçalves	5	5	0	10	0	10	0	0	0	10	5	15	0	17	10	10	10	107,0
5	David Gonçalves	5	5	5	10	17	10	20	10	10	10	10	15	15	20	10	10	10	192,0
6	Diogo Aziz	5	5	5	10	20	10	20	10	10	10	10	15	15	20	10	10	10	195,0
7	Emely Rocha																		0,0
8	Gonçalo Santos	5	5	0	10	0	10	10	10	5	10	10	15	15	5	10	10	0	130,0
9	Helena Guedes	5	5	5	15	20	10	0	10	10	10	10	15	15	20	10	10	10	180,0
10	Isa Carvalho	5	5	5	10	0	10	0	0	0	2	0	15	5	10	10	10	0	87,0
11	Isis Montenegro	5	5	5	10	0	10	0	0	0	2	0	15	5	10	10	10	0	87,0
12	João Pais	0	0	5	10	0	10	15	0	0	8	8	15	0	0	5	10	10	96,0
13	João Carreto	5	5	5	10	0	10	0	0	0	2	0	15	5	10	5	10	0	82,0
14	João Beles	5	5	0	0	0	10	0	0	0	10	5	15	0	7	10	10	10	87,0
15	Jorge Laranjeira	5	0	5	10	5	10	0	10	10	10	10	15	0	10	10	10	10	130,0
16	José Pêgo	5	5	5	10	0	10	0	0	0	10	10	15	10	15	10	10	10	125,0
18	Loredana Mihu	0	5	5	10	0	5	0	0	0	0	0	15	0	0	10	10	0	60,0
20	Manuel Reis	5	0	5	10	10	10	10	0	0	10	7	15	0	20	7	10	7	126,0
21	Maria Mourão	5	5	5	10	10	10	10	0	0	10	10	15	0	20	10	7	7	134,0
22	Maria Inês Pereira	5	5	5	15	20	10	2	10	10	10	10	15	10	20	10	10	10	177,0
23	Marta Pereira	5	5	5	10	15	10	17	10	10	10	10	15	10	10	10	10	10	172,0
24	Nicoleta Barani	5	5	5	10	10	7	0	0	0	2	0	15	5	10	10	10	10	104,0
25	Pedro Ferreira																		0,0
26	Ruben Martins	0	0	0	0	0	10	20	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	50,0
27	Sara Cunha	5	5	0	10	0	10	0	0	0	2	0	10	5	0	0	0	0	47,0
28	Vitor Arrifes	5	5	5	10	10	10	17	10	10	0	0	10	5	5	10	10	10	132,0
29	André Branco																		0,0
30	Teresa Gaspar	5	5	5	10	20	10	20	10	10	10	10	15	15	20	10	10	10	195,0

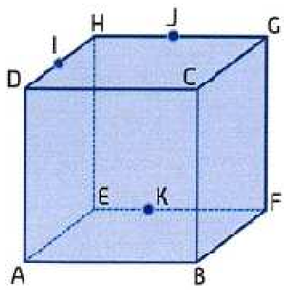
Anexo VIII

Escola Secundária João de Barros
Ano Lectivo 2009/2010
Matemática A – 10º ano, Maio 2010
Ficha de trabalho TAC2 – intersecção de planos em sólidos regulares, secções e truncaturas, respectivas métricas

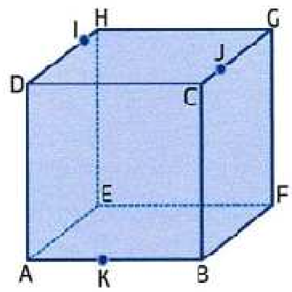
Nome:_________________________ **Nº:**_____ **Turma:**_____ **Data:** ___/___/___

1- Desenhe a secção produzida no cubo [ABCDEFGH] pelo plano IJK

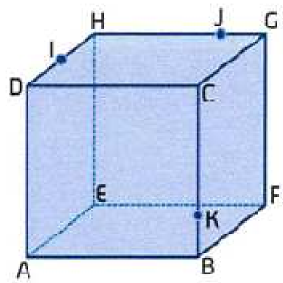
a)



b)



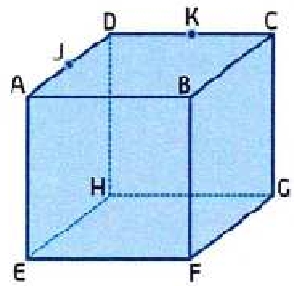
c)



2 – A figura ao lado representa um cubo cuja aresta mede 4 cm, J e K são pontos médios das arestas [AD] e [DC], respectivamente.

a) desenhe e identifique a secção produzida no cubo pelo plano HJK

b) a secção produzida no cubo pelo plano HJK decompôs o cubo em dois novos sólidos. Desenhe, em verdadeira grandeza, uma planificação do sólido cuja a aresta [DH] pertence a esse sólido



3 – Considere o cubo [ABCDEFGH], com aresta *a* e o plano IJK, sendo J e K pontos médios das arestas [AE] e [DH], respectivamente, e I um ponto de [EF], tal que $\overline{EI} = \frac{3}{4}a$

a)

a_1) desenhe e identifique a secção produzida no cubo pelo plano IJK

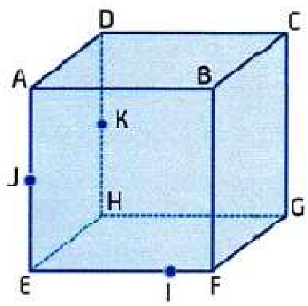
a_2) determine, em função de *a*, o perímetro e a área dessa secção

b) a secção produzida no cubo pelo plano IJK decompôs o cubo em dois novos sólidos.

b_1) identifique e caracterize o sólido resultante do corte e cuja aresta [EH] pertence a esse sólido

b_2) desenhe uma planificação do sólido referido na alínea anterior

b_3) calcule, em função de *a*, a área e o volume do referido sólido



Anexo IX

Escola Secundária João de Barros

Matemática A - 10º A

TAC2 - intersecção de planos de corte em sólidos regulares, secções e truncaturas, respectivas métricas

Maio 2010

Nº	Nome	P1			P2		P3					Total
		a)	b)	c)	a)	b)	a)		b)			
							a1	a2	b1	b2	b3	
		20	20	20	15	15	15	30	15	15	35	200
1	Catarina Dias	20	5	0	10	1	10	1	13	0	0	60,0
2	Catarina Bravo	20	20	5	10	0	10	5	5	15	15	105,0
3	Cláudia Gonçalves	20	10	0	15	1	15	20	10	15	5	111,0
5	David Gonçalves											
6	Diogo Aziz	20	20	10	15	10	15	30	15	15	17,5	167,5
8	Gonçalo Santos	20	20	0	15	15	15	0	0	0	0	85,0
9	Helena Guedes	20	20	0	15	15	15	10	0	0	0	95,0
10	Isa Carvalho											
11	Isis Montenegro	20	0	0	15	1	15	15	15	5	0	86,0
12	João Pais	20	0	0	15	0	15	0	10	5	0	65,0
13	João Carreto	10	20	10	10	1	10	0	15	15	0	91,0
14	João Beles	20	20	0	15	10	15	0	5	5	0	90,0
15	Jorge Laranjeira	20	20	0	15	1	15	0	0	5	0	76,0
16	José Pêgo	20	20	20	15	5	15	30	15	10	25	175,0
18	Loredana Mihu	20	20	20	15	5	15	30	15	15	35	190,0
20	Manuel Reis	0	0	0	15	12	15	0	15	0	0	57,0
21	Maria Mourão	20	10	0	15	10	15	20	15	0	25	130,0
22	Maria Inês Pereira											
23	Marta Pereira	20	10	0	15	13	15	30	5	15	25	148,0
24	Nicoleta Barani	10	20	10	10	0	15	20	5	0	0	90,0
25	Pedro Ferreira	20	0	0	10	10	10	20	15	0	0	85,0
26	Ruben Martins											
27	Sara Cunha	20	0	0	15	15	10	0	15	15	5	95,0
28	Vitor Arrifes	0	20	0	15	10	15	0	15	15	0	90,0
29	André Branco	0	20	0	0	0	15	15	15	15	0	80,0
30	Teresa Gaspar	20	20	10	15	2	15	30	15	0	25	152,0